

*Actes du Colloque International sur l'Optimisation
et les Systèmes d'Information*

COSI'08
du 08 au 10 Juin 2008
Tizi-Ouzou, Algérie

Organisé par:

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, UMMTO
Département d'Informatique, Faculté de Génie Electrique et Informatique
Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Productions, L2CSP
Laboratoire LIMOS-CNRS, Clermont Ferrand, France
Centre de Recherche en Informatique de Lens, CRIL, France
Association Scientifique d'Information et de Décision, ASID



Actes du CinquiÈme Colloque sur l'Optimisation et les SystÈmes d'Information COSI'2008

du 8 au 10 Juin 2008, Tizi-Ouzou, AlgÈrie

Organisation

UniversitÈ Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

PrÈsident d'honneur

Professeur Rabah KAHLOUCHE, Recteur de l'UniversitÈ Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou

PrÈsident du colloque

Bachir SADI, DÈpartement de MathÈmatique, UMMTO, Tizi-Ouzou, AlgÈrie

Membres

Rachid AHMED OUAMER
Mohamed AIDENE
Mohamed DEMRI
Hocine FELLAG
Djamal HAMADOUCHE
Abdelghani HAMAZ
Abdelkader MERAKEB
Brahim OUKACHA
Bachir SADI
Malik SI MOHAMED
Youcef TALEB

ComitÈ de Pilotage

Mohamed AIDENE, UniversitÈ Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, AlgÈrie
Hafida BELBACHIR, UniversitÈ des Sciences et Technologie d'Oran, AlgÈrie
NacÈra BENAMRANE, UniversitÈ des Sciences et Technologie d'Oran, AlgÈrie
Abdelhafidh BERRACHEDI, UniversitÈ des Sciences et Technologie Houari BoumÈdienne, Alger, AlgÈrie
Mohand-SaÔd HACID, UniversitÈ de Lyon I, France
Lhouari NOURINE, UniversitÈ de Clermont-Ferrand II, France
Jean Marc PETIT, INSA de Lyon, France
Bachir SADI, UniversitÈ de Tizi-Ouzou, AlgÈrie
Kamel TARI UniversitÈ Abderahmane Mira de Bejaia, AlgÈrie

ComitÈ de programme

PrÈsident

Lakhdar SAÔS, CRIL - CNRS, UniversitÈ d'Artois, France

Co-PrÈsidents

Meziane AIDER, UniversitÈ des Sciences et Technologie Houari BoumÈdienne, Alger, AlgÈrie
Lhouari NOURINE, ISIMA, UniversitÈ de Clermont-Ferrand II, France

Membres

AHMED NACER M. USTHB Alger (AlgÈrie)
AHMED OUAMER R. UniversitÈ de Tizi-Ouzou (AlgÈrie)
AIDENE M. UMM Tizi-Ouzou (AlgÈrie)
AIDER M. USTHB Alger (AlgÈrie)
AIT HADDADENE H. UniversitÈ USTHB Alger (AlgÈrie)
AMGHAR Y. INSA Lyon (France)
BAIOU M. Clermont-ferrand II (France)
BALINSKI M. Ecole Polytechnique de Paris (France)
BARA V., Clermont-ferrand II (France)
BIBI M.O., UniversitÈ de BÈjaia (AlgÈrie)
BELAISSAOUI M. UniversitÈ Mohammed V (Maroc)
BELBACHIR H., USTO Oran (AlgÈrie)
BENAMRANE N. USTO Oran (AlgÈrie)
BENATALLAH B. University of New South Wales (Australie)
BENBERNOU S. UniversitÈ de Lyon I (France)
BENHAMOU B. UniversitÈ d'Aix-Marseille I (France)
BERRACHEDI A. USTHB Alger (AlgÈrie)
BOUCHEMAKH I. USTHB Alger (AlgÈrie)
BOUGHANEM M. IRIT, UniversitÈ Paul Sabatier, Toulouse (France)
BOUYAKHF EI H. LIMARF, UniversitÈ Mohammed V (Maroc)
BOUZEGHOUB B. UniversitÈ de Versailles (France)
CHIADMI D. Ecole Mohammadia d'IngÈnieurs (Maroc)
DE MARCHI F. Lyon I (France)
DE MONTGOLFIER F., UniversitÈ Paris VII (France)
DJENNOUNE S. UMM Tizi-Ouzou (AlgÈrie)
DJOUADI Y. UMM Tizi-Ouzou (AlgÈrie)
DRIAS H. INI Alger (AlgÈrie)
ENNAJI A. LITIS, UniversitÈ de Rouen (France)

FELLAG H. UMM Tizi-Ouzou (AlgÈrie)
HABIB M. UniversitÈ Paris VII (France)
HACID M.S UniversitÈ Lyon I (France)
HAMADI Y., Microsoft Research Cambridge (Royaume Uni)
HAMADOUCHE D. UMM Tizi-Ouzou (AlgÈrie)
IBAZIZEN M. UMM Tizi-Ouzou (AlgÈrie)
KECHADI T. University College Dublin (Irlande)
KHEDDOUCI H. UniversitÈ Lyon I (France)
LASKRI M.T. UniversitÈ Annaba (AlgÈrie)
LETHI A.H., Metz (France)
MAHEY P. UniversitÈ de Clermont-Ferrand II (France)
MISSAOUI R. UniversitÈ du QuÈbec en Outaouais (Canada)
MESSINE F. ENSEEIHT Toulouse (France)
MONGEAU M. LAAS-CNRS, Toulouse (France)
NOURINE R. UniversitÈ d'Oran (AlgÈrie)
OUANES M. UMM Tizi-Ouzou (AlgÈrie)
PAUL C. UniversitÈ Montpellier II (France)
PIECHOWIAK S. UniversitÈ de Valenciennes (France)
PETIT JM. INSA Lyon (France)
RADJEF MS., UniversitÈ de Univ-BÈjaia (AlgÈrie)
SADI B. UniversitÈ de Tizi-Ouzou (AlgÈrie)
SADOK Ben Y. FacultÈ des Sciences de Tunis (Tunisie)
SCHNEIDER M. UniversitÈ Clermont-Ferrand II (France)
SI MOHAMED M. UMM Tizi-Ouzou (AlgÈrie)
SLIMANI Y. UniversitÈ des Sciences de Tunis (Tunisie)
TALEB-AHMED A., UniversitÈ de Valenciennes (France)
THIERRY E. ENS de Lyon (France)
TOUMANI F. UniversitÈ de Clermont-Ferrand II (France)
TRELAT E. UniversitÈ d'OrlÈans, (France)

Relecteurs additionnels

Alexandre AUSSEM, Assef CHMEISS, Pierre COLOMB, Mephu ENGELBERT, Laurent GOUVES, Christophe GUOINAUD,
Hakim HACID, Souhila KACI, Mohand Ou Idir KHEMMOUDJ, Bertrand MAZURE, Mohamed MEDJDEN, Kreshnik
MUSARAJ, Meltem OZTURK, Fatiha SAIS, Samir SEBAHI, Yacine SAM, Moh YAGOUNI

Table des matières

PrÉface page 1

ConfÉrences invitÉes

- *ThÉorie du contrÔle optimal et applications en aÉronautique*
Professeur Emmanuel TRÉLAT, UniversitÉ d'OrlÉans (France) page 2
- *Knowledge Map : An Approach for Supporting Knowledge Management in Distributed Data Mining*
Professeur Kechadi TAHAR, Department of Computer Science, University College of Dublin (Ireland) . . . page 4
- *The degree/diameter problem : a survey*
Professeur Meziane AIDER, USTHB, Alger (AlgÉrie) page 5
- *Vers des heuristiques ÈlÈgantes basÈes sur le local branching : application au knapsack multidimensionnel*
Professeur Mhand HIFI, UniversitÉ de Picardie - Jules Verne, Amiens (France) page 6

Tutoriel

- *Optimization of control systems in real time.*
Professeur Natalia BALASHEVICH, Department of Control Processes Theory, Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk page 7

Articles

- *Optimisation semi-infinie non convexe*
Le Thi Hoai An, Ouanes Mohand page 8
- *Graphes intervalle distance monotone et caractÉrisation des graphes de Laborde Mulder*
Aider MÈziane, Atmane Soria page 16
- *Les graphes gamma connexe point critiques*
Kamel Tablennehas, Mustapha Chellali, FrÉdÈric Maffray page 22

PrÈface

Les fondateurs et organisateurs successifs du Colloque sur l'Optimisation et les SystÈmes d'Information (COSI) ont rÈussi leur pari. En effet , aprÈs : COSI'04 (? Tizi Ouzou), COSI'05 (? BÈjaia), COSI'06 (? Alger), COSI'07 (? Oran), COSI'08 est la cinquiÈme Èdition de ce colloque qui se tiendra en juin ? Tizi-Ouzou. La pÈriodicitÈ annuelle du colloque a ÈtÈ maintenue, ainsi que sa diversitÈ gÈographique, le retour ? Tizi-Ouzou n'Ètant pas, je l'espÈre, la fermeture d'un cercle mais le dÈbut de la deuxiÈme spire d'une hÈlice circulaire ? pas important !

Inutile d'insister sur l'importance d'un colloque pour le dÈveloppement d'un domaine scientifique, les Èchanges directs, les confrontations entre les approches et les discussions entre chercheurs (jeunes et confirmÈs) ? partir de l'exposÈ de leurs travaux sont irremplaÁables. Plusieurs jours et un cadre convivial sont nÈcessaires pour que s'Ètablissent des relations fructueuses. Je peux tÈmoigner que ce fut le cas ? COSI'07 et je suis persuadÈ qu'il en fut de mÍme dans les Èditions prÈcÈdentes et que ces conditions essentielles (qu'Internet ne peut pas offrir !) seront prÈsentes ? COSI'08 et dans les Èditions futures.

Le thÈme du colloque COSI, "Optimisation et SystÈmes d'Information", pourrait se lire comme la "rencontre fortuite sur une table de dissection d'un parapluie et d'une machine ? coudre" mais on en est bien loin. Ce thÈme est original, pertinent et important. On peut en effet le dÈfinir de diffÈrentes maniÈres. Un pÙle est le dÈveloppement et l'utilisation de techniques pour optimiser les systÈmes d'information et plus gÈnÈralement les systÈmes informatiques. Un autre est la conception et la rÈalisation de systÈmes informatiques pour des t ?ches "d'optimisation", donc des t ?ches d'aide ? la dÈcision ou de recherche opÈrationnelle. Entre ces deux pÙles, tous les mÈlanges sont possibles, et cette fertilisation croisÈe est un facteur important de dÈveloppement aussi bien de l'optimisation que de l'informatique.

Je souhaite donc longue vie ? COSI et une excellente Èdition 2008 !

Michel Chein, Professeur ÈmÈrite, LIRMM - CNRS, UniversitÈ Montpellier II

Théorie du contrôle optimal et applications en aéronautique

Emmanuel Trélat

Université d'Orléans, UFR Sciences
Fédération Denis Poisson
Math., Labo. MAPMO, UMR 6628,
Route de Chartres, BP 6759, 45067 Orléans Cedex 2, France
emmanuel.trelat@univ-orleans.fr

Abstract. Dans cet exposé, on s'intéresse au contrôle optimal de systèmes modélisés par des équations différentielles, en dimension finie. Pour de tels systèmes, de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

où $x(t)$ est l'état et $u(t)$ est le contrôle (vérifiant éventuellement certaines contraintes), le but est d'amener le système d'un ensemble initial à un certain ensemble final, en minimisant de plus un critère d'optimisation appelé le coût.

Du point de vue théorique, le Principe du Maximum de Pontryagin donne des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre, en affirmant que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale, c'est-à-dire la solution d'un certain système Hamiltonien (version dans le cotangent des équations d'Euler-Lagrange). Réciproquement, la projection d'une extrémale n'étant pas forcément optimale, on donne des conditions d'ordre deux, utilisant la notion de premier point conjugué, point où la trajectoire perd son optimalité.

Du point de vue numérique, pour résoudre un problème de contrôle optimal, on a l'habitude de faire la distinction entre deux types de méthodes : les méthodes directes d'une part, qui consistent à tout discrétiser (état + contrôle), et se ramènent à un problème d'optimisation non linéaire, pouvant se résoudre par exemple par des méthodes de type SQP ; d'autre part, les méthodes indirectes, basées sur le Principe du Maximum, et qui numériquement se ramènent à une méthode de tir. Les algorithmes de calculs de temps conjugués sont reliés à un test de positivité d'une dérivée seconde intrinsèque, ou à un test de singularité du flot extrémal. On décrit un logiciel appelé COTCOT (Conditions of Order Two and CONjugate times), disponible sur le web, qui implémente les algorithmes précédents ainsi que la méthode de tir.

On montre ensuite comment appliquer ces outils théoriques et numériques à deux problèmes issus de l'aéronautique :

- Le problème de contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique (contrat CNES), où le contrôle est l'angle de gîte, et le coût est le flux thermique total (facteur d'usure de la navette). L'objectif est de déterminer une trajectoire optimale jusqu'à une cible donnée, sachant que la navette est de plus soumise des contraintes sur l'état : flux thermique,

accélération normale, et pression dynamique. Ces contraintes rendent le problème de contrôle optimal difficile, et nécessitent une étude préliminaire théorique et géométrique sur les synthèses optimales locales avec contraintes. Cette étape facilite la mise en oeuvre et la convergence des algorithmes de calculs.

- Le problème de transfert orbital d'un satellite à poussée faible (contrats CNES, EADS), où le but est typiquement de transférer l'engin d'une orbite basse à une orbite géostationnaire en temps minimal, sachant que la force de propulsion est très faible. Le problème de temps optimal est important lorsque la poussée est faible (par exemple, une propulsion ionique), car le transfert orbital peut prendre plusieurs mois. De plus, des contraintes sur l'état comme par exemple les contraintes de cônes d'ombre (passage dans l'ombre de la Terre par rapport au soleil) compliquent l'application des méthodes précédemment décrites.

Pour ces deux problèmes, on présentera différentes méthodes théoriques et numériques basées sur des développements théoriques récents en contrôle optimal géométrique.

References

1. E. Trélat B. Bonnard, L. Faubourg. *Mécanique céleste et contrôle de systèmes spatiaux*. Collection "Mathématiques Concrètes. Math. & Appl. **51**, Springer Verlag, XIV, 276 pages. ISBN 3-540-28373-0, 2006.
2. E. Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications*. Collection "Mathématiques Concrètes. Vuibert , 246 pages. ISBN 2 7117 7175 X, 2005.

Knowledge Map: An Approach for Supporting Knowledge Management in Distributed Data Mining

Tahar Kechadi

School of Computer Science and Informatics
University College Dublin - Ireland
tahar.kechadi@ucd.ie

Abstract. While massive amounts of data are being collected and stored not only from science fields but also industry and commerce fields, the efficient mining and management of useful information of this data are becoming a challenge and a massive economic need. The development of distributed techniques to deal with huge multi-dimensional datasets distributed among several sites certainly constitutes a solution for reducing the complexity of computations. However, the problem of efficiently managing the mined results, so called knowledge, which become increasingly complex and sophisticated, still remains. This is even more critical when the local knowledge on different sites are owned by different organisations. Usually existing distributed data mining techniques perform partial analysis on local data at individual sites and then generate global models by aggregating these local results. These two steps are not independent since naive approaches to local analysis may produce incorrect and ambiguous global data models. In order to take advantage of the mined knowledge at different locations, the distributed techniques should have a view of the knowledge that not only facilitates their integration but also minimises the effect of the local results on the global models. Briefly, an efficient management of distributed knowledge is one of the key factors affecting the outputs of these techniques.

In this presentation, we will discuss a "knowledge map", a new approach for managing knowledge of distributed data mining applications on large-scale distributed systems and also supporting the integration views of related knowledge. The concept of knowledge map has been efficiently exploited for managing and sharing knowledge in different domains but not yet in the field of distributed data mining. Our main goal is to provide a simple and efficient way to handle a large amount of knowledge built from distributed data mining applications in Grid environments. This knowledge map helps to explore quickly any results needed with a high accuracy. This will also facilitate the merging and coordination of local results to generate global models. This knowledge map is one of the key layers of ADMIRE, a framework based on Grid platform for developing distributed data mining techniques to deal with very large and distributed heterogeneous datasets. We will show how knowledge map takes advantage of the distributed platform topology.

Key words: Data Mining, Knowledge Management, distributed systems.

The degree/diameter problem : a survey

Méziane Aïder

LAI3, Faculty of Mathematics,
U.S.T.H.B., B.P. 32, El Alia, 16111, Algiers, Algeria
m-aider@usthb.dz

Abstract. The degree/diameter problem is to determine the largest graphs of given maximum degree and diameter. The order of such graphs is slightly upper bounded by the so called Moore bound and graphs for which this bound is attainable are called Moore graphs. Unhappily, Moore graphs only exist for restricted values of the maximum degree and the diameter.

Initially, Moore graphs were defined for general undirected graphs. However, since such graphs are rare, many authors tackled to extend this notion or to adapt it to special cases.

Indeed, Singleton was interested in the case of (non oriented) bipartite graphs and derived the bipartite Moore bound. He showed that for certain values of values of the maximum degree and the diameter, bipartite graphs attaining this bound exist. Many other authors have studied the same problem under other aspects.

Bridges and Toueg showed the non existence, in non trivial cases, of oriented graphs for which a theoretical bound is reached. We have considered the case of bipartite oriented graphs and obtained some results we will develop.

When it is established that a given upper bound of the order of a (Δ, D) -graph cannot be reached, we are asked to improve this bound. More precisely, whenever the Moore bound cannot be attained, it is natural to consider the existence of graphs of order one less than the Moore bound and so on.

This talk aims to give an overview of the current state-of-the-art of the degree/diameter problem.

Key words: (Δ, D) -problem, (Δ, D) -graphs, Moore graphs, Diameter, Dense graphs.

Vers des heuristiques élégantes basées sur le *local branching* : application au knapsack multidimensionnel

Mhand Hifi

Laboratoire Laria
Université de Picardie - Jules Verne
hifi@u-picardie.fr

Abstract. Dans cet exposé, nous commençons par introduire le *Local Branching* (LB) pour les programmes linéaires mixtes (MIP) de grande taille. Par la suite, nous nous concentrons principalement sur les variables booléennes. Nous présentons, dans un premier temps, une adaptation simple du LB pour le problème du sac à dos multidimensionnel à choix multiple (MMKP). Ensuite, nous présentons une heuristique élégante basée sur la méthode d'arrondi combinée avec la génération de colonnes pour le MMKP. Cette dernière sera utilisée comme une boîte noire dans une autre version augmentée du LB, adaptée au MMKP. Finalement, nous concluons l'exposé par quelques perspectives sur l'utilisation du LB.

Key words: Programmation Linéaire Mixte (MIP), Problème du sac à dos multidimensionnel.

Optimization of control systems in real time

Natalia Balashevich

Department of Control Processes Theory
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus
Minsk, Belarus
balash@im.bas-net.by

Abstract. Methods of on-line computation of optimal feedbacks for control systems are discussed. The suggested approach is based on constructing a realization of optimal feedback in any concrete control process. The implementation of the algorithm of positional solution is oriented on fast corrections of optimal open-loop control subject to small variations of initial state. This is possible due to storage a small amount of additional information allowing to avoid the complete integration of primal or adjoint system. This strategy proved to be effective for real-time optimization of control systems on finite interval.

The details of the suggested approach have been elaborated by the way of successive complication of studied problems. At first, a method of calculating current values of optimal feedback in linear endpoint optimal control problem has been developed. Then this result has been generalized for linear systems with intermediate state constraints. The next step is the supplement of the algorithm with the procedure of optimization with respect to parameters for solving the optimal control problem of a piecewise linear system. At last, for real-time optimization of control systems with nonlinear dynamics, on-line procedures of asymptotic corrections of solutions to the piecewise linear optimal control problems are suggested.

Key words: Optimisation, control systems.

Optimisation semi-infinie non convexe

Le Thi Hoai An¹ et Mohand Ouanes^{1,2}

1.LITA, Université Paul Verlaine Metz, France
 2.Département de Mathématiques, Faculté des Sciences
 Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, Algérie
 lethi@univ-metz.fr, ouanes_mohand@yahoo.fr

Résumé Nous proposons une nouvelle méthode pour résoudre des problèmes semi-infinis non convexes en utilisant les techniques d'optimisation globale. On génère deux suites de points, l'une intérieure au domaine réalisable qui donne une borne supérieure du minimum de la fonction objectif, l'autre extérieure au domaine réalisable qui donne une borne inférieure du minimum de la fonction objectif. Si on décide de s'arrêter à un nombre fixé d'itérations, on a soit une solution exacte, soit une solution approchée mais admissible. Nous avons testé notre méthode sur des problèmes trouvés dans la littérature pour montrer son efficacité.

mots clés : Programmation semi-infinie, fonction borne supérieure, borne inférieure, borne supérieure.

1 Introduction

On considère le problème semi-infini suivant :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ g(x, s) \leq 0; \forall s \in S \subset R \\ x \in R^n \end{cases}$$

avec f et g des fonctions non convexes une fois continuellement différentiables par rapport à leurs arguments, et S un compact de R . Il existe plusieurs méthodes pour résoudre ce problème par exemple : La discrétisation, la méthode du lagrangien etc...(voir [1],[3],[9]). La difficulté pour ces méthodes c'est la vérification de l'admissibilité qui reste un problème très difficile et que la solution approchée n'est pas toujours admissible. Nous proposons une méthode qui permet d'avoir soit une solution exacte, soit une solution approchée mais admissible. Notre méthode utilise la fonction borne supérieure de la fonction contrainte pour trouver des points admissibles. Notre méthode comporte deux étapes : la première c'est la résolution du problème discrétisé pour avoir la borne inférieure du minimum de la fonction objectif, la deuxième c'est la construction d'un point admissible pour avoir la borne supérieure.

L'article est organisé comme suit : En 2 nous présentons la construction de la fonction borne supérieure, à la section 3 l'algorithme et sa convergence sont présentés, des exemples numériques sont présentés en 4.

2 Fonction borne supérieure

On considère la fonction borne supérieure pour une fonction quelconque f définie sur $S = [s_0, s_1]$, $h = s_1 - s_0$, f de classe C^1

$$U_h f(s) = f(s_0)w_0(s) + f(s_1)w_1(s) + \frac{L-l}{(s_1-s_0)}(s-s_0)(s_1-s)$$

$$\text{avec } w_0(s) = \frac{s_1-s}{s_1-s_0}$$

$$w_1(s) = \frac{s-s_0}{s_1-s_0}$$

$$L = \max_{s \in S} f'(s)$$

$$l = \min_{s \in S} f'(s)$$

L et l sont évaluées en utilisant les techniques d'analyse intervalle.
On a les propriétés des $w_i(s)$ $0 \leq w_i(s) \leq 1$; $i = 0, 1$

$$w_i(s^j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, i = 0, 1; j = 0, 1$$

$$\sum_{i=0}^1 w_i(s) = 1$$

Proposition 1 $U_h f(s) \geq f(s); \forall s \in S$

Démonstration. on a d'abord $U_h f(s)$ et $f(s)$ qui coïncident aux extrémités de l'intervalle s_0 et s_1 , pour les autres points de l'intervalle
on a $f(s) = f(s_0) + (s-s_0)f'(\xi) \leq f(s_0) + (s-s_0)L$ (1)
ou bien $f(s) = f(s_1) + (s-s_1)f'(\xi) \leq f(s_1) + (s-s_1)l$ (2)
d'autre part

$$\begin{aligned} U_h f(s) &= f(s_0)w_0(s) + f(s_1)w_1(s) + \frac{L-l}{(s_1-s_0)}(s-s_0)(s_1-s) \\ &= f(s_0)w_0(s) + L(s_1-s_0)w_1(s)w_0(s) + f(s_1)w_1(s) - l(s_1-s_0)w_1(s)w_0(s) \\ &= (f(s_0) + L(s_1-s_0)w_1(s))w_0(s) + (f(s_1) - l(s_1-s_0)w_0(s))w_1(s) \\ &\geq \min\{f(s_0) + L(s_1-s_0)w_1(s), f(s_1) - l(s_1-s_0)w_0(s)\} \\ &\geq \min\{f(s_0) + L(s-s_0), f(s_1) - l(s_1-s)\} \geq f(s) \text{ d'après (1) et (2)} \end{aligned}$$

Proposition 2 La fonction borne supérieure est quadratique

Démonstration. Il suffit de développer $U_h f(s)$ $U_h f(s) = f(s_0)w_0(s) + f(s_1)w_1(s) + \frac{L-l}{(s_1-s_0)}(s-s_0)(s_1-s)$

On a $w_0(s)$ et $w_1(s)$ qui sont linéaires et le terme $\frac{L-l}{(s_1-s_0)}(s-s_0)(s_1-s)$ est quadratique donc $U_h f(s)$ est quadratique

Proposition 3 La fonction borne supérieure est concave

Démonstration. La fonction borne supérieure est quadratique avec le coefficient de s^2 qui est $\frac{-(L-l)}{(s_1-s_0)} < 0$ donc la fonction borne supérieure est concave

3 Algorithmes et Convergence

3.1 Algorithme

Etape 1 : Fixer $\varepsilon > 0$, discrétisation de $S = \{s_0, s_1\}$,
 Résoudre le problème $(P_0^L) \begin{cases} \min f(x) \\ g(x, s_i) \leq 0; i = 0, 1 \end{cases}$
 pour avoir x_0^L sinon infaisabilité
 et poser $LB_0 = f(x_0^L)$
 Etape 2 : Admissibilité si possible
 Calculer $U_{h,s}g(x_0^L, s)$ puis $\max_{s \in S} U_{h,s}g(x_0^L, s)$ pour avoir $s^*(x_0^L)$
 si $U_{h,s}g(x_0^L, s^*(x_0^L)) \leq 0$, stop x_0^L est optimale sinon continuer
 Etape 3 : Résoudre le problème $(P_0^U) \begin{cases} \min f(x) \\ U_{h,s}g(x, s^*(x)) \leq 0 \end{cases}$ avec $s_1 - s_0$
 pour avoir un point admissible si possible x_0^U et poser $UB_0 = f(x_0^U)$
 sinon poser $UB_0 = \infty$
 Etape 4 : Si $UB_0 - LB_0 \leq \varepsilon$ stop x_0^U est ε -optimal
 Etape 5 : Ajouter $s^*(x_0^L) = s_0^*$ à la discrétisation s_0, s_1
 et aller à l'itération k
 Itération $k = 1, 2, 3, \dots$
 renuméroter $s_{k-1}^*, s_0, s_1, \dots, s_k$ par ordre croissant pour avoir $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{k+1}$
 $k1$ Résoudre $(P_k^L) \begin{cases} \min f(x) \\ g(x, s_j) \leq 0; j = 0, 1, \dots, k+1 \end{cases}$
 pour avoir x_k^L et poser $LB_k = f(x_k^L)$
 $k2$ Vérification de l'admissibilité
 si $U_{h,s}g(x_k^L, s^*(x_k^L)) \leq 0$, stop x_k^L est optimal sinon continuer
 $k3$ Résoudre
 $(P_k^U) \begin{cases} \min f(x) \\ \max_{s \in [s_{j-1}, s_j]} U_{h,s}g(x, s) \leq 0, j = 1, \dots, k+1 \end{cases}$
 pour avoir un point admissible si possible x_k^U et poser
 $UB_k = \min\{UB_{k-1}, f(x_k^U)\}$
 sinon poser $UB_k = \infty$
 $k5$ Si $UB_k - LB_k \leq \varepsilon$ stop x_k tel que $UB_k = f(x_k)$ est ε -optimale
 sinon ajouter $s^*(x_k^L)$ à la discrétisation et aller en $k1$.

Remarques

1°/

$$\begin{aligned} U_{h,s}g(x, s) &= L_h g(x, s) + \frac{L-l}{h}(s-s_0)(s_1-s) \\ &= \sum_{i=0}^1 g(x, s_i) w_i(s) + \frac{L-l}{h}(s-s_0)(s_1-s) \end{aligned}$$

$U_{h,s}g(x, s)$ est la fonction borne supérieure de $g(x, \cdot)$ sur $S = [s_0, s_1]$

2°/ on a la valeur du maximum de $U_{h,s}g(x, s)$ sur $[s_0, s_1]$ qui est donnée par

$$s^*(x) = \frac{s_0 + s_1}{2} + \frac{g(x, s_1) - g(x, s_0)}{2(L-l)}$$

et on calcule

$$\max_{s \in [s_0, s_1]} U_h g(x, s) = U_h g(x, s^*(x)) = L_h g(x, s^*(x)) + \frac{L-l}{h} (s^*(x) - s_0)(s_1 - s^*(x))$$

On ajoute le point $s^*(x_0)$ à la discrétisation si $s^*(x_0) \in S$
sinon on ajoute le milieu de l'intervalle $[s_0, s_1]$

3°/ si le problème

$$(P_0^U) \begin{cases} \min f(x) \\ U_{h_s} g(x, s^*(x)) \leq 0 \text{ avec } h = [s_0, s_1] \end{cases}$$

admet une solution c'est clair qu'elle est admissible pour le problème semi-infini de départ car

$g(x, s) \leq U_{h_s} g(x, s^*(x)) \forall s \in [s_0, s_1]$ i.e $U_{h_s} g(x, s^*(x))$ est la fonction borne supérieure de $g(x, s)$ sur $[s_0, s_1]$.

3.2 Convergence

Comme les problèmes donnant UB_k et LB_k ont même fonction objectif il suffit de montrer la proposition suivante

Proposition 4 $\lim_{h \rightarrow 0} (g(x, s) - U_h g(x, s)) = 0$ avec h la longueur de l'intervalle

Démonstration. on a

$$\begin{aligned} 0 \leq U_h g(x, s) - g(x, s) &= g(x, s_0)w_0(s) + g(x, s_1)w_1(s) + \frac{L-l}{(s_1-s_0)}(s-s_0)(s_1-s) - g(x, s) \\ &= g(x, s_0)w_0(s) + g(x, s_1)w_1(s) + \frac{L-l}{(s_1-s_0)}(s-s_0)(s_1-s) - g(x, s_0) - (s-s_0)g'(x, \xi) \\ &\leq -g(x, s_0) - (s-s_0)l + \max\{g(x, s_0) + L(s-s_0), g(x, s_1) - l(s_1-s)\} \end{aligned}$$

Alors on a deux cas

1er cas

$$\max\{g(x, s_0) + L(s-s_0), g(x, s_1) - l(s_1-s)\} = g(x, s_0) + L(s-s_0) \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq U_h g(x, s) - g(x, s) &\leq -g(x, s_0) - (s-s_0)l + g(x, s_0) + L(s-s_0) \\ &\leq (s-s_0)(L-l) \leq h(L-l) \rightarrow 0, \text{ quand } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2eme cas

$$\max\{g(x, s_0) + L(s-s_0), g(x, s_1) - l(s_1-s)\} = g(x, s_1) - l(s_1-s)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq U_h g(x, s) - g(x, s) &\leq -g(x, s_1) - (s-s_1)L + g(x, s_1) - l(s_1-s) \\ &\leq (L-l)(s_1-s) \leq h(L-l) \rightarrow 0, \text{ quand } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Remarque

On a donc le domaine de (P_k^U) qui tend vers le domaine de (P) de l'intérieur

et d'autre part le domaine du (P_k^L) du problème discrétisé tend vers le domaine de (P) de l'extérieur puisque le nombre de points de la discrétisation tend vers l'infini

donc $\lim_{k \rightarrow \infty} (UB_k - LB_k) \rightarrow 0$ On a LB_k est une suite croissante car elle est donnée par les problèmes discrétisés successifs dont les domaines deviennent de plus en plus petits vu que le nombre de contraintes augmente. On a UB_k est une suite non croissante par construction.

Proposition 5 $UB_k \searrow f(x^*)$ et $LB_k \nearrow f(x^*)$

Démonstration. On a $LB_k \nearrow f(x^*)$ car la solution du problème discrétisé tend vers la solution du problème semi-infini de départ comme $|UB_k - LB_k| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$ alors $UB_k \searrow f(x^*)$

Remarque

Dans le cas où la fonction contrainte g a une structure particulière par exemple

1. g est linéaire par rapport à la variable s alors les points actifs se trouvent aux extrémités de l'intervalle S et on a la solution à la 1ère discrétisation

2. si g est concave par rapport à s on calcule son maximum par rapport à s en fonction de x et on se ramène à un problème d'optimisation classique avec un nombre fini de contraintes

(voir exemples trouvés dans [9])

4 Exemples numériques

Soient les exemples trouvés dans [1]

Problème 1

$$\begin{cases} \min \frac{1}{3}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 - x_2 \\ x_1^2 + 2x_1x_2s^2 - \sin(s) \leq 0; s \in [0, 2] \end{cases}$$

on discrétise avec $s = 0$

on obtient le problème discrétisé

$$\begin{cases} \min \frac{1}{3}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 - x_2 \\ x_1^2 \leq 0 \end{cases}$$

la solution est $(0, .5)$

vérification de l'admissibilité

$$\max_{s \in [0, 2]} (-\sin(s)) = 0$$

donc la solution $(0, .5)$ est admissible alors elle est optimale car le domaine du problème discrétisé contient le domaine du problème semi-infini de départ.

Problème 2

$$\begin{cases} \min \frac{1}{3}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 \\ (1 - x_1^2s^2)^2 - x_1s^2 - x_2^2 + x_2 \leq 0; s \in [0, 1] \end{cases}$$

on discrétisé avec $s = 0$

$$\begin{cases} \min \frac{1}{3}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 \\ 1 - x_2^2 + x_2 \leq 0 \end{cases}$$

on trouve

$$x_1 = -.75, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = -.61803$$

verification de l'admissibilité

$$\begin{aligned} & [(1 - x_1^2 s^2)^2 - x_1 s^2 - x_2^2 + x_2]_{x_1=-.75, x_2=-.61803} = (1 - .5625s^2)^2 + .75s^2 - \\ & .99999 = \max_s [(1 - .5625s^2)^2 + .75s^2 - .999999] \leq 0 \end{aligned}$$

donc la solution $(-.75, .61803)$ est admissible alors elle est optimale

Problème N

$$\begin{cases} \min x_2 \\ 2x_1^2 s - s^4 + x_1^2 - x_2 \leq 0; s \in [-1, 1] \end{cases}$$

on discretise avec $s = 0$ on obtient

$$\begin{cases} \min x_2 \\ x_1^2 - x_2 \leq 0; s \in [-1, 1] \end{cases}$$

donc la solution est $x_2 = 0$ et $x_1 = 0$

verification de l'admissibilité

$-s^4 \leq 0; \forall s \in [-1, 1]$ donc elle est admissible, donc elle est optimale

Soient les exemples trouvés dans [9]

Exemple 1

$$\begin{cases} \min 2.25e^{x_1} + e^{x_2} \\ s - e^{x_1+x_2} \leq 0; s \in [0, 1] \end{cases}$$

On résout le problème discrétisé en utilisant les deux extrémités de l'intervalle on trouve directement la solution $X^* = (-0.405, -0.405)$. On utilise la fonction borne supérieure, comme la fonction g est linéaire par rapport à s donc son maximum est atteint à l'une des extrémités, dans ce cas il est atteint en $s = 1$ donc le point actif est égale à 1 et on retrouve la solution du problème discrétisé qui est donc admissible donc optimale.

Exemple 2

$$\begin{cases} \min 1.21e^{x_1} + e^{x_2} \\ s - e^{x_1+x_2} \leq 0; s \in [0, 1] \end{cases}$$

On résout le problème discrétisé en utilisant les deux extrémités de l'intervalle on trouve directement la solution $X^* = (0.0953, 0.0953)$. On utilise la fonction borne supérieure, comme la fonction g est linéaire par rapport à s donc son maximum est atteint à l'une des extrémités, dans ce cas il est atteint en $s = 1$ donc le point actif est égale à 1 et on retrouve la solution du problème discrétisé qui est donc admissible donc optimale.

5 Conclusion

Nous avons développé une méthode de résolution des problèmes de programmation semi-infinie non convexe en construisant deux suites de points l'une intérieure l'autre extérieure qui donnent les bornes supérieure et inférieure respectivement du minimum de la fonction objectif. Des techniques d'optimisation

globale sont utilisées dans la résolution de ces problèmes. Notre méthode donne soit une solution exacte ou bien une solution approchée mais admissible. Des exemples numériques sont traités pour montrer l'efficacité de notre méthode.

Références

1. B.Bhattacharjee,W.H.Green,Jr and P.Barton,Interval Methods for Semi-Infinite Programs, Computational Optimization and Applications,30,1-31 (2005)
2. Berthiau ,G. et Siarry ,P. "Etat de l'art des metodes d'optimisation globale", EDP Sciences (2002) 329-367.
3. Coope and Watson .A projected lagrangian algorithm for semi-infinite programming .Mathematical Programming North Holland .1985.
4. Dur ,M . Dual bounding procedure lead to convergent Branch-and-Bound algorithms;Optimization (2001).
5. Gergel,V.P.," A Global Optimization Algorithm for Multivariate fonctions with Lipschitzian First Derivatives,"j.of Global Optimization ,vol.10 N°.3 (1997)257-281.
6. Glashoff and Gustafson,"Linear Optimization and Approximation,"Amplitude Math.SciencesSpringer-Verlag(1983) .
7. Gourdin,E.,Jaumard,B.,and Ellaia,R.,"Global Optimization of Hölder Functions,"j.of Global Optimization,vol.8 n°.4 (1996)323-348
8. Gribik .A central cutting-plane algorithm for semi-infinite programming problems . Univ.Pitsburg U.S.A.1979.
9. Guo-Xin Liu, A homotopy interior point method for semi-infinite programming problems,J.Glob.Optim. 37 (2007) 637-646.
10. Gustavson and Glashoff .Linear optimization and approximation.Royal institut of technology Stockholm Swenden.1983.
11. Gustavson and Kortanek .Semi-infinite programming and applications, Royal institut of technology Stockholm Swenden.1984.
12. Gustavson .On numerical analysis in semi-infinite programming .Royal institut of technology Stockholm Swenden.1982.
13. R.Hettich. A comparison of some numerical methods for semi-infinite programming . Univ.de Bonn.W.Germany.1980.
14. Hettich ,R.,Kortanek,K."Semi-infinite programming : Theory ,methods and applications.SIAM Rev.35.3, (1993) 380-429.
15. Horst,R and Tuy,H "Global Optimization :Deterministic Approaches " 2nd rev.edn.,Spinger Verlag ,Berlin (1993) .
16. Hu.h "A Globally Convergent Method for Semi-infinite Linear Programming" ,J.of Global Optimization ,vol8,n°2 (1996) 189-199.
17. Hui.Hu. A one phase algorithm for semi-infinite linear programming, Mathematical programming North Holland.1988.
18. Jongen and Zwier .On regular semi-infinite optimization .Depart.math. Univ.Enshede ,Netherland .1986.
19. Kostyukova,O.I. "An Algorithm for Constructing Solutions for a Family of Linear Semi-Infinite Problems "Variationnal Calculus Optimal Control and Applications pp 1-34 (2000).

20. Le Thi Hoai An and Pham Dinh Tao , "A Branch and Bound Method via d.c. Optimization Algorithms and Ellipsoidal Technique for Box Constrained Nonconvex Quadratic Problems", *j.of Global Optimization* ,vol 13,n° 2 (1998) 171-206.
21. Le Thi Hoai An ,Pham Dinh Tao and Le Dung Muu "Numerical solution for optimization over the efficient set by d.c.optimization algorithm." *Operations Research Letters* 19 :(1996)117-128.
22. Le Thi Hoai An and Ouanes Mohand , A tighter lower bound by convex quadratique function for univariate global optimization edited by Le Thi Hoai An &Pham Dinh Tao in *Hermes Science Publishing* PP 223-231
23. Lopez and Vercher .Optimality conditions for non differentaible convex semi-infinite programming .*Mathematical programming North Holland*.1983
24. M.K.Luhandjula ,Ichihachi and Inuguishi.Fuzzy and semi-infinite programming .*Information Sciences*.1992.
25. Luhandjula,M.K.and Belhouas,M.and Ouanes,M" Semi-infinite Mathematical Programming :A collocation approach," *International center for theoritical physics,Trieste Italy* (1994) .
26. Luhandjula M.K. and Ouanes M."A cutting plane method for Semi-infinite Optimization", *African Journal of science and technology* (2001) pp 1-10.
27. Rinnooy,A.H.G.and Timmer,G.H.,"Global Optimization :A Survey," *In :Nemhauser G.L.et al.,eds.,Handbooks of Operations Research1,North-Holland,Elsevier Science Publishers(1989)* 631-662.
28. R.T. Rockafellar . *Convex Analysis* .Princeton Univ.Press,Princeton .1970.
29. Sergeyev,Y.D,"Global one-dimensionnal optimization using smooth auxiliary functions ," *Mathemtical Programming* ,vol 81 n°1 (1998) .
30. G.Still ,"Discretization in semi-infinite programming :The rate of convergence, *Optimization* (2001) 53-69.
31. T.Tanaka , M.Fukushima and T.Ibaraki .A globally convergent SQP method for semi-infinite non linear optimization.*Journal of computational and applied maths* ,North Holland .1988.
32. Wang,X.,and Chang,T-S, "A Multivariate Global Optimization Using Linear bounding Functions," *j.of Global Optimization*,vol 12 , n° .4 (1998) 383-404.
33. Wang ,X and Chang,T-S,"An Improved Univariate Global Optimization Algorithm with Improved Linear Lower Bounding Functions ," *j.of Global Optimization* ,vol.8,n°4 (1996) 393-411.

Graphes intervalle distance monotone et caractérisation des graphes de Laborde Mulder

Méziane Aïder * and Soria Atmane **

* Laboratoire LAID3, Faculté de mathématiques
U.S.T.H.B., B.P. 32 EL Alia 16111 Bab Ezzouar Alger

** Département de Mathématiques, Faculté des Sciences
Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, Algérie

Abstract. A simple connected graph is said to be interval distance monotone if every interval induces a distance monotone graph.

In this paper, we are interested in a characterization of the class of interval distance monotone graphs by focusing on the subclass of extended odd graphs (also called Laborde-Mulder graphs) for which we obtain a new characterization.

Résumé. Un graphe simple et connexe est dit intervalle distance monotone si tout intervalle entre chaque paire de sommets induit un graphe distance monotone.

Dans cet article, nous nous intéressons à la caractérisation des graphes de cette classe de graphes en nous basant sur la sous classe des graphes de Laborde-Mulder pour laquelle nous obtenons une nouvelle caractérisation.

Key words: Interval, Distance monotone, Interval distance monotone, Extended odd graphs (Laborde-Mulder graphs)

Mots clés: Intervalle, Distance monotone, Intervalle distance monotone,

Graphe de Laborde Mulder

Introduction

L'intervalle en tant que sous-graphe induit, joue un rôle central pour étudier quelques classes de graphes contenant l'hypercube comme sous classe. Dans ce cadre, Burosch, Havel et Laborde [5] ont utilisé la notion d'intervalle pour définir de nouvelles classes de graphes. Les graphes intervalle monotone sont, par définition, les graphes dans lesquels tout intervalle est convexe, et les graphes distance monotone sont également définis dans le même esprit (tout intervalle est fermé).

Récemment, Aïder et Aouchiche [1, 2] ont introduit la notion d'intervalle distance monotone qui a conduit à la définition de la classe des graphes intervalle

* m-aider@usthb.dz

** sorry78@yahoo.fr

2 caractérisation des graphes de Laborde Mulder

distance monotone (tout intervalle est distance monotone). Ils ont principalement caractérisé l'hypercube et les graphes de Hamming en tant que graphes intervalle distance monotone. Récemment, Zhang et Wang [9] ont obtenu une caractérisation complète des graphes intervalle distance monotone.

Dans cet article, nous nous intéressons à la caractérisation d'une autre sous classe de graphes intervalle distance monotone.

En premier lieu, nous revisitons la notion de distance monotone puis rappelons celle d'intervalle distance monotone. En utilisant cette notion, nous obtenons une nouvelle caractérisation des graphes de Laborde Mulder.

1 Préliminaire

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et connexe où V est l'ensemble des sommets de G . L'ensemble des voisins d'un sommet u de G , est noté $N_G(u)$. Le degré de u , qu'on note $d_G(u)$, est le nombre de voisins de u . Le degré maximum et le degré minimum sont notés $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement. Un graphe G est dit k -régulier si tous ses sommets ont le même degré k . La distance $d_G(u, v)$ entre deux sommets u et v de G est la longueur de la plus courte chaîne entre u et v . Le diamètre de G , qu'on note $D(G)$, est la distance maximum entre toutes les paires de sommets.

L'intervalle $I_G(u, v)$ est l'ensemble des sommets w de G tels qu'il existe une (u, v) -plus courte chaîne de G (ou (u, v) -géodésique) contenant w . Un intervalle peut être défini comme suit : $w \in I_G(u, v) \Leftrightarrow d_G(u, v) = d_G(u, w) + d_G(w, v)$. Soient w, \bar{w} deux sommets de V . Si $d(w, \bar{w}) \geq d(u, v)$ pour toute paire de sommets u et v dans V alors \bar{w} est le diamétral de w dans V . Si chaque sommet de G a un unique sommet diamétral, alors G est un graphe diamétral. Un sous-graphe H de G est dit convexe, si pour toute paire de sommets u et v de H , l'intervalle $I_G(u, v)$ est contenu dans H . Un graphe G est dit intervalle monotone, si tous ses intervalles sont des sous graphes convexes de G . Un intervalle $I_G(u, v)$ est dit fermé si : $\forall w \in V \setminus I_G(u, v), \exists w' \in I_G(u, v)$ tel que $d_G(w, w') > d_G(u, v)$. Si tous les intervalles de G sont fermés, alors G est dit distance monotone.

Pour un sommet u , $N_i(u)$ est l'ensemble des sommets à distance i de u . L'ensemble des voisins de u est désigné par $N(u)$ ou par $N_1(u)$. Une décomposition en niveaux relative au sommet u est une partition de $V(G)$ en N_0, N_1, \dots, N_p où $p = \text{diam}(G)$ et $N_i = \{w \in V(G), d_G(u, w) = i, i = 0, 1, \dots, p\}$. L'ensemble N_i est appelé le i -ième niveau de u dans G .

Un $(0, 2)$ -graphe est un graphe où toute paire de sommets a 0 ou 2 voisins communs.

L'hypercube de dimension n , noté Q_n , est le graphe dont l'ensemble de sommets représente les n -uplets de $\{0, 1\}^n$, deux sommets u et v sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent exactement d'une seule composante. Notons que pour $n \geq 0$, nous avons $Q_{n+1} = Q_n \oplus K_2$. De ce fait, Q_n peut être vu comme le produit de n copies de K_2 .

2 Caractérisation des graphes de Laborde Mulder

Soit $k \geq 2$, le graphe de Laborde-Mulder (graphe impair étendu) $E_k = (V, E)$ est défini par:

$$V = \{A \subseteq \{1, 2, \dots, 2k-1\} : |A| \leq k-1\},$$

$$E = \{AB, A, B \in V : |A \Delta B| = 1 \text{ ou } |A \Delta B| = 2k-2\}$$

Le plus petit graphe de Laborde Mulder est le graphe E_2 (Le graphe de la Fig.1)

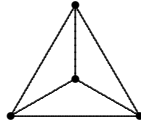


Fig. 1. E_2

rappelons quelques propriétés des graphes de Laborde-Mulder.

Proposition 1. [7] Soit $E_k = (V, E)$ un graphe de Laborde Mulder alors:

1. E_k est $(2k-1)$ régulier ;
2. $D(E_k) = k-1$;
3. $\forall A, B \in V, \langle I(A, B) \rangle = Q_{d(A, B)}$ (tout intervalle induit un hypercube).
4. Le plus petit cycle impair de E_k est de longueur $2k-1$;
5. Pour $k \geq 3, E_k$ est sans triangle;
6. Tout intervalle induit un sous graphe étoilé (tout intervalle de E_k est intervalle monotone donc induit un sous-graphe convexe donc étoilé.);
7. E_k est intervalle monotone;
8. E_k est intervalle distance monotone.

Definition 1. On dira qu'un graphe simple et connexe G , vérifie la propriété (P) si G n'est pas biparti et si G ne contient pas $K_{1,2}$ comme sous-graphe convexe.

Theorem 1. Soit G un graphe intervalle distance monotone. G est de Laborde Mulder si et seulement si il vérifie la propriété (P).

Preuve. Condition nécessaire : Si G est un graphe de Laborde Mulder, alors G vérifie la propriété (P), en vertu de l'assertion 3. de Proposition 1.

Condition suffisante : rappelons d'abord le résultat suivant :

Theorem 2. [7] Soit G un $(0, 2)$ -graphe de degré $2k-1$ et d'ordre 2^{2k-1} . Alors :

4 caractérisation des graphes de Laborde Mulder

1. $\text{Diam}(G) \geq k - 1$.
2. $\text{Diam}(G) = k - 1$ si et seulement si $G \cong E_k$.

Ainsi, pour prouver la condition suffisante, il suffit de montrer que les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) G est un $(0, 2)$ -graphe ;
- (ii) $O(G) = 2^{2k-1}$ où $O(G)$ est l'ordre de G .

Proposition 2. *Soit G un graphe intervalle distance monotone sans $K_{1,2}$ comme sous-graphe convexe. Alors G est un $(0, 2)$ -graphe.*

Preuve. Soit G un graphe intervalle distance monotone sans $K_{1,2}$ comme sous graphe convexe et considrons deux sommets u et v à distance deux (ayant un voisin commun x). Les sommets u et v ont nécessairement un autre voisin commun (puisque G est sans $K_{1,2}$ comme sous graphe convexe, et n'ont pas d'autre voisin commun (sinon $I(u, v)$ ne serait pas isomorphe ni à une chaîne, ni à un cycle pair ni à un hypercube).

Donc, G est un $(0, 2)$ -graphe.

Montrons que $O(G) = 2^{2k-1}$:

Soient N_0, N_1, \dots, N_{k-1} la décomposition en niveaux relative au sommet noté u .

Montrons que : $\forall v \in N_i, |N_v \cap N_{i-1}| = i$ et $|N_i| = \binom{n}{i}$

Pour cela, nous procédons par récurrence sur $i, i = 1, \dots, k - 1$.

Pour $i = 1$

$$\forall v \in N_i \quad |N_v \cap N_0| = |u| = 1 \quad \text{et} \quad |N_1| = |N_u| = 2k - 1 = \binom{2k-1}{1}$$

Pour $i \geq 2$, supposons que la propriété est vraie pour i et montrons qu'elle est vraie pour $i + 1$:

Soit $v \in N_{i+1}$ et $x \in |N_v \cap N_i|$ (voir la Fig 2) Par hypothèse de récurrence x possède au moins i voisins dans N_{i-1} notés x_1, x_2, \dots, x_i .

Remarquons que chaque triplet de sommets x_j, x, v $j = (1, \dots, i)$ forme $K_{1,2}$. Comme $K_{1,2}$ ne peut être un sous graphe convexe, alors nécessairement pour chaque x_j on peut trouver y_j dans N_i tel que $\{x_j, y_j, v, x\}$ forme un quadrilatère (Q_2), où les y_j sont tous distincts. D'où $|N_v \cap N_i| = i + 1$.

Montrons à présent que $\forall i = 0, \dots, k - 1 \quad |N_i| = \binom{2k-1}{i}$.
En comptant les arêtes entre N_i et N_{i+1} deux fois, nous obtenons :

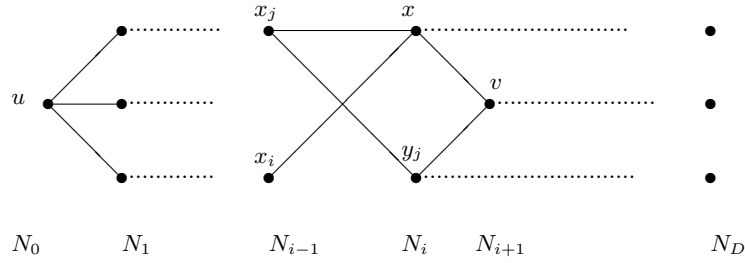


Fig. 2.

1. $\sum_{x \in N_i} |N_x \cap N_{i+1}| = \sum_{y \in N_{i+1}} |N_y \cap N_i| = A.$
2. Si $x \in N_i$ $|N_x \cap N_{i+1}| = (2k - 1) - i.$
3. Si $y \in N_{i+1}$ $|N_y \cap N_i| = i + 1.$

1., 2. et 3. impliquent :

$$(i + 1)|N_{i+1}| = A = (2k - 1 - i)|N_i|$$

Alors :

$$|N_{i+1}| = |N_i| \frac{2k - 1 - i}{i + 1} = \binom{2k-1}{i} \frac{2k - 1 - i}{i + 1} = \binom{2k-1}{i+1}$$

d'où la propriété est vraie à l'ordre $i + 1.$

D'autre part nous avons :

$$|V(G)| = \sum_{i=0}^D |N_i| = \sum_{i=0}^D \binom{2k}{i}, \text{diam}(G) = D$$

D'où

$$|V(G)| = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k}{i} = 2^{2k-1}$$

Ainsi, nous avons démontré que

$$O(G) = 2^{2k-1}$$

En utilisant ces deux dernières notions, la preuve de notre caractérisation découle directement de Théorème 2.

6 caractérisation des graphes de Laborde Mulder

Conclusion

Dans le présent article, nous avons caractérisé les graphes de Laborde Mulder comme étant une sous classe intéressante des graphes intervalle distance monotone.

Il serait intéressant d'étudier les graphes intervalle distance monotone, qui ne sont ni des hypercubes, ni des graphes de Hamming, ni des graphes de Laborde Mulder, en essayant d'obtenir des caractérisations de ces graphes.

References

1. M.Aider and M.Aouchiche, Distance monotonicity and a new characterization of hypercube, *Discrete Math*, 245 (2002)55-62
2. M.Aider and M.Aouchiche, Distance monotonicity and a new characterization of Hamming graphs, *Information Processing Letters* 96 (2005) 207-213
3. M.Aouchiche, Distance et convexité dans les graphes, thèse de Magister, U.S.T.H.B, Oct 1995
4. A.Berrachedi, Une nouvelle caractrisation de L'hypercube, *Rencontre Algéro-Franaise de Recherche Oprationnelle*, Mai 1990 Alger.
5. G.Burosch, I.Havel and J.M.Laborde, Distance monotonicity and a new characterization of hypercube, *Discrete Math*, 110(1992) 9-16.
6. J.M.Laborde and Rao-Herbbare, Another characterization of Hypercubes, *Discrete Math*.39 (1982) 161-166.
7. R.R.M.Madani, Characterization of Laborde Mulder graphs (extended odd graphs), *Discrete math*, 150(1996) 9-16.
8. H.M.Mulder, *The Interval Function of a Graph*, MCT 132, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1980.
9. Heping Zhang, Guangfu Wang: Characterization of the interval distance monotone graphs. *Discrete Mathematics* 307(21): 2622-2627 (2007).

Les graphes γ_c -point critiques

¹Kamel Tablennehas ¹Mustapha Chellali et ²Frédéric Maffray

¹Laboratoire LAMDA-RO

Département des Mathématiques, Université de Blida.

B.P. 270, Blida, Algérie.

E-mail: Tablennehas1@yahoo.fr et m_chellali@hotmail.com

²CNRS, Laboratoire G-SCOP

46, Avenue Felix Vialle 38031 Grenoble Cedex, France.

E-mail: Frederic.Maffray@g-scop.inpg.fr.

Résumé

Un sous ensemble S de sommets d'un graphe connexe $G = (V, E)$ est un dominant connexe de G si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S et le sous graphe induit par les sommets de S est connexe. Le nombre de domination connexe noté $\gamma_c(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant connexe de G . Un graphe G est dit γ_c -point critique (**dcp-critique**) si la contraction de tout couple de sommets adjacents fait diminuer $\gamma_c(G)$, et il est dit totalement γ_c -point critique (**tdcp-critique**) si l'identification de tout couple de sommets fait diminuer $\gamma_c(G)$.

Dans cet article, on caractérise quelques classes des graphes (**t**)**dcp-critiques**, en particulier les bloc graphes, les cactus et les graphes scindés. On donne par la suite une caractérisation des graphes (**t**)**dcp-critiques** pour $\gamma_c(G) = 2$.

1 Introduction

On considère un graphe simple connexe $G = (V, E)$ ayant $V(G)$ comme ensemble de sommets et $E(G)$ comme ensemble d'arêtes. Le nombre de sommets $|V(G)|$ dans un graphe G est appelé ordre de G et noté souvent par n . Le voisinage ouvert d'un sommet est $N(v) = \{u \in V / uv \in E\}$, son voisinage fermé est $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Le degré d'un sommet v , noté par $d_G(v)$ est $|N(v)|$. Un sommet de degré nul est dit isolé. Un sommet de degré un est appelé sommet pendant, et son voisin est dit sommet support.

Un sommet v est dit sommet d'articulation si le graphe $G - v$ n'est pas connexe. Un sous graphe connexe B de G est un bloc, si B est sans point d'articulation et tout sous graphe B' de G tel que B est un sous graphe de B' et $B \neq B'$ admet au moins un sommet d'articulation. Un bloc B de G est dit bloc terminal, si B contient au plus un sommet d'articulation de G . Un graphe G est un graphe bloc, si tout bloc de G est une clique. Un graphe est appelé graphe cactus si chaque arête de G est contenu dans au plus un cycle. Un cactus ayant un seul cycle est dit unicycle. Un graphe cactus connexe sans cycle est appelé arbre. Un graphe scindé est un graphe dont l'ensemble des sommets est partitionné en un ensemble indépendant et un ensemble clique. Une couronne d'un graphe H notée par HoK_1 est obtenu par une copie de H où chaque sommet de H est adjacent à un sommet pendant.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$ est un ensemble dominant si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S . Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G est appelé nombre de domination et est noté par $\gamma(G)$.

Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est un ensemble dominant connexe (**edc**) si S est ensemble dominant et le sous-graphe induit par les sommets de S est connexe. Le nombre domination connexe $\gamma_c(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant connexe de G .

Un ensemble dominant connexe S de cardinal $\gamma_c(G)$ est appelé $\gamma_c(G)$ -ensemble ou simplement γ_c -ensemble de G .

Un graphe G est γ_c -point critique (**dcp-critique**) si $\gamma_c(G_{ab}) < \gamma_c(G)$ pour toute arête $ab \in E$, et G est totalement γ_c -point critique (**tdcp-critique**) si $\gamma_c(G_{ab}) < \gamma_c(G)$ pour tout couple de sommets $(a, b) \in V \times V$. Si a et b sont deux sommets de G (a et b peuvent être adjacents ou non), alors on note par G_{ab} le graphe obtenu par la contraction de l'arête ab ou l'identification de a et b . Le nouveau sommet obtenu dans G_{ab} est noté par \overline{ab} . Rappelons que la notion des graphes γ -point critiques a été introduite par Burton et Sumner [3].

Dans cet article, on va étudier les graphes (totalement) γ_c -point critiques.

1.1 Quelques résultats préliminaires

Nous débutons par présenter les deux Observations suivantes:

Observation 1 Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et $a \in V$. Si a est un point d'articulation de G alors a appartient à tout $\gamma_c(G)$ -ensemble.

Observation 2 Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et $a, b \in V$.
i)– Si $ab \in E$ alors $\gamma_c(G) - 1 \leq \gamma_c(G_{ab}) \leq \gamma_c(G)$.
ii)– Si $ab \notin E$ alors $\gamma_c(G) - 3 \leq \gamma_c(G_{ab}) \leq \gamma_c(G)$.

Preuve. Il est clair que tout $\gamma_c(G)$ -ensemble est un $\gamma_c(G_{ab})$ -ensemble, par conséquent $\gamma_c(G_{ab}) \leq \gamma_c(G)$. Soit D un $\gamma_c(G_{ab})$ -ensemble. On suppose que $ab \in E$. Si $\overline{ab} \notin D$, alors D , ou $D \cup \{b\}$ est un dominant connexe de G et par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{ab}) + 1$. Si $\overline{ab} \in D$, alors $\{a, b\} \cup D - \{\overline{ab}\}$ est un dominant connexe de G , et par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{ab}) + 1$. Dans les deux cas on a $\gamma_c(G) - 1 \leq \gamma_c(G_{ab}) \leq \gamma_c(G)$. On suppose maintenant que $ab \notin E$. Si $\overline{ab} \notin D$, alors au moins un sommet de a ou b , disons b est adjacent à D . Puisque G est un graphe connexe, alors le sommet a admet soit un voisin dans D soit il est adjacent à un sommet $w \in V - D$ qui est adjacent à D . Alors D ou $D \cup \{w\}$ est un dominant connexe de G , respectivement. D'où $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{ab}) + 1$. Finalement on suppose que $\overline{ab} \in D$. Si le sous graphe induit par $\{a, b\} \cup D - \{\overline{ab}\}$ est connexe, alors $\{a, b\} \cup D - \{\overline{ab}\}$ est un dominant connexe de G et par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{ab}) + 1$. On suppose maintenant que $D' = \{a, b\} \cup D - \{\overline{ab}\}$ n'est pas connexe. Alors il existe deux composantes connexes H_a et H_b telles que $a \in H_a$ et $b \in H_b$. Comme G est un graphe connexe, alors soit il existe un sommet $z \in V - D$ adjacent à H_a et H_b ou bien ils existe deux sommets adjacents $x, y \in V - D$ tel que x est adjacent à H_a et y est adjacent à H_b , dans ce cas $D' \cup \{z\}$ ou $D' \cup \{x, y\}$ est un dominant connexe de G . D'où $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{ab}) + 3$. ■

Remarque 3 L'inégalité gauche de l'Observation (2) (ii) est atteinte pour la chaîne P_8 en identifiant les deux sommets supports, voir figure.1.

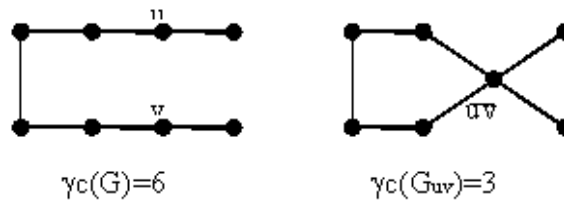


Fig .1

Observation 4 Soient C un cycle du graphe G et D un $\gamma_c(G)$ -ensemble. Si C est un bloc alors D contient au moins $|V(C)| - 2$ sommets

de C , plus précisément:

- D contient $|V(C)|$ sommets de C si et seulement si tout sommet de C est d'articulation.
- D contient $|V(C)|-1$ sommets de C si et seulement si le cycle C contient au moins un sommet de degré deux dans G et l'ensemble de ces sommets est un ensemble indépendant.
- D contient $|V(C)|-2$ sommets de C si et seulement si le cycle C contient deux sommets adjacents de degré deux dans G .
- Si un sommet x de C n'appartient à aucun $\gamma_c(G)$ -ensemble alors x est l'unique sommet de degré deux dans C ou bien C contient exactement deux sommets adjacents de degré deux dans C ou bien il existe trois sommets consécutifs de degré deux dans C tel que x soit le milieu et le reste des sommets de degré deux sont indépendants.

Proposition 5 Soit H un bloc d'un graphe **dcp-critique**. Alors:

- 1) Si H est un cycle, alors
 - Tout sommet support de H est de degré trois.
 - Si H contient un support, alors $A_H = \{x \in H : d_G(x) = 2\}$ est un ensemble indépendant de cardinal différent de un. De plus, si $|A_H| \geq 2$, alors tout sommet support est adjacent à un sommet de A_H .
 - Si H ne contient aucun support, alors le sous graphe induit par A_H ne contient aucune arête ou bien il contient au moins deux arêtes. De plus si A_H est un ensemble indépendant alors $|A_H| \neq 1$.
- 2) Si H est une clique, alors
 - Si H est un bloc terminale, alors $H = K_2$.
 - Les blocs terminaux n'ont pas de sommets en communs.
 - Si H n'est pas un bloc terminal, alors tout sommet de H est un sommet d'articulation.

Preuve. (1) Supposons que H est un cycle. Soit x un sommet support et x' un sommet pendant adjacent à x . Si $d_G(x) \geq 4$, alors le sommet $\overline{xx'}$ est un sommet d'articulation dans le graphe $G_{xx'}$ et tout $\gamma_c(G_{xx'})$ -ensemble est un dominant connexe de G . Par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{xx'})$, contradiction.

Supposons que A_H n'est pas un ensemble indépendant et soient a et b deux sommets adjacents de A_H . Il est clair que tout $\gamma_c(G_{xx'})$ -ensemble D contient exactement $|V(H)| - 2$ sommets de H tel que $\overline{xx'} \in D$ et $(D \cup \{x\}) - \{\overline{xx'}\}$ est un dominant connexe de G , par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{xx'})$, d'où contradiction.

Supposons maintenant que $|A_H| = 1$. Alors le reste des sommets de H sont

d'articulations. Donc par la contraction de l'unique sommet de A_H avec un des deux voisins, on peut voir clairement que tout dominant connexe du graphe obtenu est un dominant connexe du graphe G , par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{xx'})$, d'où la contradiction. On suppose que $|A_H| \geq 2$ et que x n'est adjacent à aucun sommet de A_H . Alors les deux voisins de x dans H sont des sommets d'articulations et donc $A_H \cup \{\overline{xx'}\}$ est un ensemble indépendant, par conséquent tout $\gamma_c(G_{xx'})$ -ensemble D contient exactement $|V(H)| - 1$ sommets de H avec $\overline{xx'} \in D$ mais $(D \cup \{x\}) - \{\overline{xx'}\}$ est un dominant connexe de G , par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{xx'})$, contradiction. On suppose maintenant que H ne contient aucun sommet support et le sous graphe induit par A_H contient exactement une arête, disons ab . Alors tout $\gamma_c(G_{ab})$ -ensemble D contient tous les sommets du cycle résultant sauf un sommet disons \overline{ab} dans ce cas D est un dominant connexe de G , par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{ab})$, d'où la contradiction. Enfin on suppose que $A_H = \{a\}$. Alors le reste des sommets de H sont des sommets d'articulations, par conséquent le dominant connexe minimum du graphe obtenu à partir de la contraction du sommet a et un des deux sommets voisins est un dominant connexe de G , contradiction.

(2) Soit H une clique. Supposons que H est un bloc terminal d'ordre au moins trois, alors en contractant une arête de H , le dominant connexe minimum du graphe résultant est un dominant connexe de G , contradiction. Supposons maintenant que H_1 et H_2 sont deux blocs terminaux ayant des sommets en communs, alors la contraction d'une arête de H_1 ne diminuera pas $\gamma_c(G)$. On suppose que H est un bloc non terminal et y est un sommet qui n'est pas d'articulation. Alors contracter l'arête reliant y et un sommet de ces voisins dans H ne fait pas diminuer $\gamma_c(G)$. ■

1.2 Les graphes (t)dcp- critiques

Comme $\gamma_c(G) \geq 1$ pour tout graphe G connexe, il est clair qu'il n'existe aucun graphe 1- γ_c -point critique. A partir de là on considère seulement les graphes qui satisfont $\gamma_c(G) \geq 2$.

Au début on propose une condition suffisante pour les graphes 2-connexes **tdcp-point critiques**.

Proposition 6 *Soit G un graphe 2-connexe tel que $\gamma_c(G - v) < \gamma_c(G)$ pour tout sommet v . Alors G est **tdcp-critiques**.*

Preuve. Soient u et v deux sommets quelconque de G et soit S un $\gamma_c(G - v)$ -ensemble.

Si $u \notin S$, alors u admet un voisins dans S et dans ce cas S est un ensemble dominant connexe de G_{uv} , par conséquent $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$.

Si $u \in S$, alors u et v ne sont pas adjacents car sinon S peut être un dominant de G de taille inférieure à $\gamma_c(G)$, et par conséquent $\{\overline{uv}\} \cup S - \{u\}$ est un dominant connexe de G_{uv} , d'où $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$. ■

Remarque 7 La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie pour tout graphe 2-connexe. Puisque si on considère le graphe G obtenu à partir des deux triangles **abc** et **def** en ajoutant deux sommets g, h et les arêtes ag, gf, cd, he et bh . On a $\gamma_c(G - v) = \gamma_c(G)$ pour $v = d$, voir figure.2.

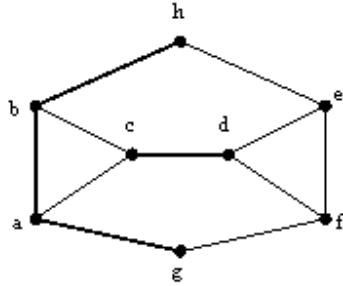


Fig .2

Théorème 8 Soit G un graphe bloc connexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) G est un graphe **tdcp-critique**.
- b) G est un graphe **dcp-critique**.
- c) Pour tout bloc H :
 - Si H est un bloc terminal, alors $H = K_2$.
 - Si H n'est pas un bloc terminal, alors tout sommet de H est d'articulation.
 - Tout sommet support appartient exactement à deux blocs.

Preuve. (a) implique (b) : découle de la définition d'un graphe **tdcp-critique**.

(b) implique (c) : d'après la proposition (5), on a les deux points de (c). Pour le troisième point on suppose que u est un support appartenant à trois blocs et v est un sommet pendant adjacent à u . Alors le sommet \overline{uv} est dans tout $\gamma_c(G_{uv})$ -ensemble D , d'où D peut être un $\gamma_c(G)$ -ensemble, contradiction.

(c) implique (a) : Il est clair que le nombre dominant connexe d'un graphe bloc qui satisfait le point (c) est $\gamma_c(G) = n - |L(G)|$. Soient u et v deux sommets du graphe G .

Cas.1. Si $uv \in E(G)$. On suppose que u et v sont de degré au moins deux, alors $L(G) = L(G_{uv})$, et par conséquent $\gamma_c(G_{uv}) \leq (n-1) - L(G_{uv}) < n - |L(G)| = \gamma_c(G)$. Supposons maintenant que v est le sommet pendant adjacent à u . Comme u est un support appartient à deux blocs, alors le sommet \overline{uv} appartient à un seul bloc dans le graphe G_{uv} . Soit D un $\gamma_c(G)$ -ensemble, alors $u \in D$ et $D - \{u\}$ est un $\gamma_c(G_{uv})$ -ensemble.

Cas.2. Si $uv \notin E(G)$. Supposons que u et v ne sont pas des sommets pendants, alors $V(G_{uv}) - L(G_{uv})$ est un ensemble dominant connexe de G_{uv} de taille $(n-1) - |L(G_{uv})| < \gamma_c(G)$. Maintenant on suppose qu'un sommet de u ou v est un sommet pendant, disons le sommet v et soit w son sommet support. Alors pour tout $\gamma_c(G)$ -ensemble D , $D - \{u\}$ est un $\gamma_c(G_{uv})$ -ensemble. Dans les deux cas $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$, d'où G est **tdcp-critique**. ■

Il s'en déduit de ce théorème le corollaire suivant:

Corollaire 9 Soit T un arbre d'ordre $n \geq 4$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- a) T est un arbre **tdcp-critique**.
- b) T est un arbre **dcp-critique**.
- c) Tout sommet support de T est de degré deux.

Une caractérisation des graphes scindés **(t)dcp-critiques** est donnée par le théorème suivant:

Théorème 10 Soit G un graphe scindé connexe.

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

- i) G est un graphe **tdcp-critique**.
- ii) G est un graphe **dcp-critique**.
- iii) G est une couronne d'un graphe complet non trivial.

Preuve. (i) implique (ii) et (iii) implique (i) sont évidents.

(ii) implique (iii): Soit G un graphe scindé connexe, partitionné en une clique C et un stable I , et soit D un $\gamma_c(G)$ -ensemble quelconque. Il est clair que $D \subseteq C \neq \emptyset$ et donc $|C| \geq 2$. Puisque le sous graphe induit par D est une clique, chaque sommet $v \in D$ admet au moins un sommet privé dans $V - D$, et aussi dans I . On suppose qu'un sommet $v \in D$ admet deux

sommets privés dans $V - D$, alors en contractant l'arête reliant un sommet privé et le sommet v ne diminuera pas $\gamma_c(G)$, par conséquent chaque sommet $v \in D$ admet un unique sommet privé dans $V - D$. On suppose maintenant qu'il existe un sommet $y \in I$ adjacent à au moins deux sommets de D , alors en contractant une arête quelconque reliant le sommet y et un sommet de $N(y) \cap D$ ne diminuera pas $\gamma_c(G)$, par conséquent I constitue l'ensemble des sommets privés de D . De plus la contraction d'une arête qui existe dans $C - D$, ne changera pas $\gamma_c(G)$ en cardinal, d'où $|C - D| \leq 1$. On suppose que $C - D = \{z\}$ et que le sommet z est adjacent à deux sommets x' et y' de I , alors l'ensemble $D' = \{z\} \cup D - \{x, y\}$ tel que x et y sont deux sommets de D adjacents à x' et y' respectivement est un dominant connexe de G de cardinal $|D| - 1$. Dans ce cas en contractant l'arête xx' ou yy' ne diminuera la taille de D , contradiction. Par conséquent $C - D = \emptyset$. Alors tout sommet de I est un sommet pendant et par conséquent G est une couronne de C . ■

Les graphes cactus **dcp-critiques** sont caractérisés par le théorème suivant.

Théorème 11 *Soit G un graphe cactus connexe. Alors G*

*est **dcp-critique** si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes:*

i) Pour tout cycle C de G , tout sommet support appartenant au cycle C est de degré trois et tout support n'appartenant à aucun cycle est de degré deux.

ii) Pour tout cycle C . Si C contient un sommet support, alors

- $A_C = \{x \in C : d_G(x) = 2\}$ est un ensemble indépendant de cardinal différent de un.

- Si $|A_C| \geq 2$, alors tout sommet support de C est adjacent à un sommet de A_C .

iii) Pour tout cycle C de G . Si C ne contient pas de sommet support, alors le sous graphe induit par A_C soit ne contient aucune arête soit il contient au moins deux arêtes. De plus si A_C est un ensemble indépendant, alors $|A_C| \neq 1$.

Preuve. On suppose que G est **dcp-critique**. Par la proposition (5) les trois points sont vérifiés sauf la deuxième partie du point (i). Soit u un sommet support de degré au moins trois et v un sommet pendant adjacent à u . Alors le sommet \overline{uv} est un sommet d'articulation dans le graphe G_{uv} et par conséquent tout $\gamma_c(G_{uv})$ -ensemble est un dominant connexe de G . D'où $\gamma_c(G_{uv}) \leq \gamma_c(G)$, contradiction. On suppose maintenant que G satisfait les points (i), (ii) et (iii) et Soient x, y deux sommets adjacents de G et D un

$\gamma_c(G)$ -ensemble.

Cas1. Il n'existe aucun cycle C contenant x et y à la fois. Il est clair qu'un sommet de x ou y est un sommet d'articulation. On suppose que x et y sont des sommets d'articulations, alors par l'observation (1), ils appartiennent à D et $(D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un dominant connexe de G_{xy} , par conséquent $\gamma_c(G_{xy}) < \gamma_c(G)$. On suppose maintenant que le sommet x n'est pas d'articulation, cela implique que x est un sommet pendant, par conséquent y est un sommet support. Dans ce cas si y n'appartient à aucun cycle, alors y est un support de degré deux. D'où $y \in D$ et $D - \{y\}$ est un dominant connexe de G_{xy} , par conséquent $\gamma_c(G_{xy}) < \gamma_c(G)$.

Cas2. Il existe un cycle C contenant x et y . Supposons que les deux sommets sont d'articulations, alors $(D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un dominant connexe de G_{xy} , par conséquent $\gamma_c(G_{xy}) < \gamma_c(G)$. Supposons maintenant que x et y ne sont pas des sommets d'articulations, alors $x, y \in A_C$, par conséquent A_C n'est pas un ensemble indépendant, d'où le cycle C ne contient aucun sommet support. Donc par (iii) il existe une autre arête $x'y'$ dans C tel que les sommets $x', y' \in A_C$, alors D contient tout les sommets de C sauf deux sommets, disons x' et y' . On suppose que les arêtes xy et $x'y'$ ne sont pas adjacents, alors $(D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un dominant connexe de G_{xy} . On suppose maintenant que xy et $x'y'$ adjacents ($x = x'$), alors $D - \{y\}$ est un dominant connexe de G_{xy} . Dans les deux cas on a $\gamma_c(G_{xy}) < \gamma_c(G)$. Supposons dans ce cas que x n'est pas un sommet d'articulation et y est un sommet d'articulation. On suppose que le cycle C contient un support t , alors puisque le sommet x est de degré deux, par (ii) l'ensemble A_C est un ensemble indépendant et elle contient un autre sommet de degré deux, disons le sommet a . D'où D contient tous les sommets de C sauf un sommet disons a et donc $(D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un dominant connexe de G_{xy} . On suppose maintenant que C ne contient aucun support. Si A_C est un ensemble indépendant, par (iii) le cycle C contient un autre sommet $a \neq x$ et donc D contient tous les sommets de C sauf le sommet a , d'où $(D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un dominant connexe de G_{xy} . Si A_C n'est pas un ensemble indépendant, alors par (iii) elle contient au moins deux arêtes. On peut choisir un $\gamma_c(G)$ -ensemble D tel que $x \in D$. Comme D contient tous les sommets de C sauf deux sommets adjacents de A_C , alors $(D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un dominant connexe de G_{xy} . Dans tous les cas on a $\gamma_c(G_{xy}) < \gamma_c(G)$, par conséquent G est **dcp-critique**. ■

Nous donnons ci-dessous une caractérisation des graphes unicycles **tdcp-critiques**.

Théorème 12 *Un graphe unicycle G connexe de cycle C est **tdcp-critique***

si et seulement si il vérifie les conditions suivantes:

i) Tout sommet support appartenant au cycle C est de degré trois et tout sommet support n'appartenant pas au cycle C est de degré deux.

ii) Si C contient un sommet support, alors

- $A_C = \{x \in C : d_G(x) = 2\}$ est un ensemble indépendant de cardinal différent de un et deux.

- Si $A_C \neq \emptyset$, alors tout sommet support de C est adjacent à un sommet de A_C .

iii) Si C ne contient pas de sommet support, alors le sous graphe induit par A_C soit il ne contient aucune arête soit il contient au moins deux arêtes.

De plus si A_C est un ensemble indépendant, alors $|A_C| \geq 3$.

Preuve. Soit G un graphe unicycle **tdcp-critique**, alors G est **dcp-critique**. et les points (i), (ii) et (iii) du théorème(11) sont vérifiées.

On suppose que le cycle C contient un sommet support et $A_C = \{u, v\}$, on identifiant les sommets u et v , les sommets de l'ensemble $(C - \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}\}$ sont des sommets d'articulations dans le graphe G_{uv} . Soit D un $\gamma_c(G_{uv})$ -ensemble, alors $(D - \{\overline{uv}\}) \cup \{u\}$ est un dominant connexe de G , contradiction. Pour le point (iii), on utilise le même argument que précédemment pour montrer que si le cycle C ne contient pas un sommet support, alors A_C est un ensemble indépendant de taille au moins trois.

Pour la réciproque, on suppose que G vérifie les points (i), (ii) et (iii). Il est clair qu'en utilisant le théorème(11), la contraction de toute arête diminue la taille du $\gamma_c(G)$. Ainsi soient u et v deux sommets non adjacents de G . On considère trois cas possibles:

Cas1. Si u et v appartiennent à un certain $\gamma_c(G)$ -ensemble D , alors $(D - \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}\}$ est un dominant connexe de G_{uv} et par conséquent $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$.

Cas2. Si u et v n'appartiennent à aucun $\gamma_c(G)$ -ensemble. Alors soit u et v sont des sommets pendants soit u un sommet pendant et v est le sommet milieu de trois sommets consécutifs de degrés deux.

On suppose que u et v sont des sommets pendants et soit u' le sommet support adjacent à u . Il est clair que si $u' \in C$, alors d'après (ii) tout $\gamma_c(G)$ -ensemble contient soit tous les sommets de C (dans le cas $A_C = \emptyset$), soit $|V(C)| - 1$ sommets (dans le cas $A_C \neq \emptyset$). Si le dernier cas avoir lieu, le sommet u' est adjacent à un sommet de $a \in A_C$. tel que $a \notin D$, alors dans tous les cas $D - \{u'\}$ est un dominant connexe de G_{uv} et par conséquent $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$.

On suppose maintenant que u est un sommet pendant et v est le sommet milieu des trois sommets consécutifs de degrés deux dans C . Puisque

A_C n'est pas un ensemble indépendant, le sommet support u' adjacent à u n'appartient pas à C ($d(u') = 2$). D'où pour tout $\gamma_c(G)$ -ensemble D , $D - \{u'\}$ est un dominant connexe de G_{uv} et par conséquent $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$.

Cas3. Le sommet u appartient à un certain $\gamma_c(G)$ -ensemble D et le sommet v n'appartient à aucun $\gamma_c(G)$ -ensemble. Alors le sommet v est un sommet pendant ou bien est le milieu des trois sommets consécutifs de degrés deux dans C , disons a, v, b et le cycle C ne contient pas deux sommets adjacents de $A_C - \{a, v, b\}$.

On suppose que v est un sommet pendant et soit v' son sommet support. Supposons que $v' \notin C$, alors $D - \{v'\}$ est un dominant connexe de G_{uv} . Supposons maintenant que $v' \in C$, alors par (ii) D contient soit $|V(C)|$ sommets de C soit $|V(C)| - 1$ sommets de C , cela dépend de l'existence ou non de l'ensemble A_C respectivement, alors $D - \{v'\}$ est un dominant connexe de G_{uv} .

On suppose maintenant que le sommet v est le milieu de a, v, b tel que $a, v, b \in A_C$, et l'ensemble $A_C - \{a, v, b\}$ est soit vide soit un ensemble indépendant. Alors D contient exactement un sommet de a ou b , disons b et donc $D - \{b\}$ est un dominant connexe de G_{uv} . Dans tous les cas on a $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$. ■

2 Les graphes (t)dcp- critiques avec $\gamma_c(G)$ petit

Dans [3] T. Burton et D. Sumner ont caractérisé les graphes (totalement) γ -point critique ayant $\gamma(G) = 2$.

Théorème 13 Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre $n \geq 4$ avec $\gamma(G) = 2$. Alors G est γ -point critique si et seulement si chaque composante du graphe \overline{G} est une couronne ou une clique K_p , $p \geq 2$.

Théorème 14 Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ avec $\gamma(G) = 2$. Alors G totalement γ -point critique si et seulement si chaque composante du graphe \overline{G} est une couronne.

Une caractérisation des graphes **dcp-critiques** ayant $\gamma_c(G) = 2$ est donnée par le Théorème suivant:

Théorème 15 Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe avec $\gamma_c(G) = 2$. Alors G est un graphe **dcp-critique** si et seulement si G est γ -point critique .

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. On suppose que G est γ_c -point critique. Puisque $\gamma_c(G) = 2$, aucun sommet de G ne puisse dominé tous les sommets donc $2 \leq \gamma(G) \leq \gamma_c(G) = 2$, par conséquent $\gamma(G) = 2$. Maintenant si G est **dcp-critique**, alors toute arête uv contractée fait diminuer la taille de $\gamma_c(G)$, d’ou $\gamma(G_{uv}) = 1$. Par conséquent G est γ -point critique. Pour la réciproque, comme $\gamma(G_{uv}) = 1$ pour toute arête uv , alors $\gamma_c(G_{uv}) = 1$ et par conséquent G est **dcp-critique**. ■

Nous donnons ci-dessous une caractérisation des graphes **tdcp-critiques** ayant $\gamma_c(G) = 2$.

Théorème 16 Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe avec $\gamma_c(G) = 2$. Alors G est **tdcp-critique** si et seulement si G est totalement γ -point critique.

Preuve. On suppose que G est **tdcp-critique**. Alors $\gamma(G) = 2$ puisque G ne contient pas de sommet de degré $n - 1$. Et comme $\gamma_c(G_{uv}) = 1$ pour tout couple de sommets (u, v) . Alors $\gamma(G_{uv}) = 1$, par conséquent G est totalement γ -point critique. Pour la réciproque, Supposons que $\gamma(G_{uv}) = 1$ pour tout couple de sommets (u, v) . Alors $\gamma_c(G_{uv}) = 1$, par conséquent G est **tdcp-critique** ■

References

- [1] C.Berge. Graphs, North holland, 1985.
- [2] Haynes T.W, Hedetniemi S.T et Slater P.J, “ Fundamentals of Domination in graphs”, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [3] T.Burton, et D.P.Summer, Domination dot-critical graphs. *Discrete Mathematics* 306 (2006) 11-18
- [4] T. Burton, et D.P. Summer, γ -excellent, critically dominated, end dominated, and dot-critical trees are equivalent. *Discrete Mathematics* 307 (2007) 683-693.

