Sur la Théorie des Jeux Multicritères

Mohammed Said RADJEF

Laboratoire LAMOS
Département de Recherche Opérationnelle
Université de Béjaia

Ecole d'Eté ,Oran 2007

La théorie des jeux est une branche des mathématiques qui se propose de formaliser et d'étudier les conflits, les comportements et la prise de décision de plusieurs agents rationnels (les joueurs) qui interagissent dans une situation donnée, c'est-à-dire une situation qu'ils jugent selon des préférences contradictoires et dont ils peuvent influencer certains paramètres.

Des faits marquants :

- Léon Walras (1834-1910) : Mathématiques en économie (modèle de l'équilibre général de concurrence parfaite)
- Cournot (1838)
- Zermelo (1912)
- Emile Borel (1921)
- Von Neumann (1928)
- Von Neumann et Oskar Morgenstern : *Theory of Games and Economic Behavior* : 1944

Des faits marquants :

- Léon Walras (1834-1910) : Mathématiques en économie (modèle de l'équilibre général de concurrence parfaite)
- Cournot (1838)
- Zermelo (1912)
- Emile Borel (1921)
- Von Neumann (1928)
- Von Neumann et Oskar Morgenstern : *Theory of Games and Economic Behavior* : 1944

Des faits marquants :

- Léon Walras (1834-1910) : Mathématiques en économie (modèle de l'équilibre général de concurrence parfaite)
- Cournot (1838)
- Zermelo (1912)
- Emile Borel (1921)
- Von Neumann (1928)
- Von Neumann et Oskar Morgenstern : *Theory of Games and Economic Behavior* : 1944

Des faits marquants :

- Léon Walras (1834-1910) : Mathématiques en économie (modèle de l'équilibre général de concurrence parfaite)
- Cournot (1838)
- Zermelo (1912)
- Emile Borel (1921)
- Von Neumann (1928)
- Von Neumann et Oskar Morgenstern : *Theory of Games and Economic Behavior* : 1944

Des faits marquants :

- Léon Walras (1834-1910) : Mathématiques en économie (modèle de l'équilibre général de concurrence parfaite)
- Cournot (1838)
- Zermelo (1912)
- Emile Borel (1921)
- Von Neumann (1928)
- Von Neumann et Oskar Morgenstern : *Theory of Games and Economic Behavior* : 1944

Des faits marquants :

- Léon Walras (1834-1910) : Mathématiques en économie (modèle de l'équilibre général de concurrence parfaite)
- Cournot (1838)
- Zermelo (1912)
- Emile Borel (1921)
- Von Neumann (1928)
- Von Neumann et Oskar Morgenstern : *Theory of Games and Economic Behavior* : 1944

Des faits marquants :

- Léon Walras (1834-1910) : Mathématiques en économie (modèle de l'équilibre général de concurrence parfaite)
- Cournot (1838)
- Zermelo (1912)
- Emile Borel (1921)
- Von Neumann (1928)
- Von Neumann et Oskar Morgenstern : *Theory of Games and Economic Behavior* : 1944

Une théorie récompensée par le prix Nobel d'économie

- 1994
  - Nash
  - Selten (1965) Equilibre de sous-jeux parfaits
  - Harsanyi (1967 - 1968) jeu à information incomplète
- 2005
  - Schelling (1960) Strategy of Conflict, Jeu de coordination et point focal
  - Aumann (1981) : théorie des jeux répétés

Une théorie récompensée par le prix Nobel d'économie

- 1994
  - Nash
  - Selten (1965) Equilibre de sous-jeux parfaits
  - Harsanyi (1967 - 1968) jeu à information incomplète
- 2005
  - Schelling (1960) Strategy of Conflict, Jeu de coordination et point focal
  - Aumann (1981) : théorie des jeux répétés

Une théorie récompensée par le prix Nobel d'économie

- 1994
  - Nash
  - Selten (1965) Equilibre de sous-jeux parfaits
  - Harsanyi (1967 - 1968) jeu à information incomplète
- 2005
  - Schelling (1960) Strategy of Conflict, Jeu de coordination et point focal
  - Aumann (1981) : théorie des jeux répétés

Qu'est ce qu'un jeu ?

Un jeu stratégique se caractérise par un ensemble de règles spécifiant :

1. les joueurs
2. les espaces de stratégies (actions ou décisions)
3. la séquence des décisions
4. les gains ou l'utilité des joueurs (fonction des décisions des joueurs)
5. l'information à la disposition des joueurs (complète/ parfaite)

Qu'est ce qu'un jeu ?

Un jeu stratégique se caractérise par un ensemble de règles spécifiant :

1. les joueurs
2. les espaces de stratégies (actions ou décisions)
3. la séquence des décisions
4. les gains ou l'utilité des joueurs (fonction des décisions des joueurs)
5. l'information à la disposition des joueurs (complète/ parfaite)

Qu'est ce qu'un jeu ?

Un jeu stratégique se caractérise par un ensemble de règles spécifiant :

1. les joueurs
2. les espaces de stratégies (actions ou décisions)
3. la séquence des décisions
4. les gains ou l'utilité des joueurs (fonction des décisions des joueurs)
5. l'information à la disposition des joueurs (complète/ parfaite)

Qu'est ce qu'un jeu ?

Un jeu stratégique se caractérise par un ensemble de règles spécifiant :

1. les joueurs
2. les espaces de stratégies (actions ou décisions)
3. la séquence des décisions
4. les gains ou l'utilité des joueurs (fonction des décisions des joueurs)
5. l'information à la disposition des joueurs (complète/ parfaite)

Qu'est ce qu'un jeu ?

Un jeu stratégique se caractérise par un ensemble de règles spécifiant :

1. les joueurs
2. les espaces de stratégies (actions ou décisions)
3. la séquence des décisions
4. les gains ou l'utilité des joueurs (fonction des décisions des joueurs)
5. l'information à la disposition des joueurs (complète/ parfaite)

Qu'est ce qu'un jeu ?

Un jeu stratégique se caractérise par un ensemble de règles spécifiant :

1. les joueurs
2. les espaces de stratégies (actions ou décisions)
3. la séquence des décisions
4. les gains ou l'utilité des joueurs (fonction des décisions des joueurs)
5. l'information à la disposition des joueurs (complète/ parfaite)

Typologie des jeux

- Jeux coopératifs et non coopératifs
- Jeux avec décisions simultanées ou séquentielles
- Jeux statiques ou répétés (en horizon fini ou infini)
- Jeux à information complète ou incomplète
- Jeux à somme nulle (strictement compétitifs) / Jeux à somme non-nulle
- Jeux à 2 joueurs / Jeux à n joueurs

Typologie des jeux

- Jeux coopératifs et non coopératifs
- Jeux avec décisions simultanées ou séquentielles
- Jeux statiques ou répétés (en horizon fini ou infini)
- Jeux à information complète ou incomplète
- Jeux à somme nulle (strictement compétitifs) / Jeux à somme non-nulle
- Jeux à 2 joueurs / Jeux à n joueurs

Typologie des jeux

- Jeux coopératifs et non coopératifs
- Jeux avec décisions simultanées ou séquentielles
- Jeux statiques ou répétés (en horizon fini ou infini)
- Jeux à information complète ou incomplète
- Jeux à somme nulle (strictement compétitifs) / Jeux à somme non-nulle
- Jeux à 2 joueurs / Jeux à n joueurs

Typologie des jeux

- Jeux coopératifs et non coopératifs
- Jeux avec décisions simultanées ou séquentielles
- Jeux statiques ou répétés (en horizon fini ou infini)
- Jeux à information complète ou incomplète
- Jeux à somme nulle (strictement compétitifs) / Jeux à somme non-nulle
- Jeux à 2 joueurs / Jeux à n joueurs

Typologie des jeux

- Jeux coopératifs et non coopératifs
- Jeux avec décisions simultanées ou séquentielles
- Jeux statiques ou répétés (en horizon fini ou infini)
- Jeux à information complète ou incomplète
- Jeux à somme nulle (strictement compétitifs) / Jeux à somme non-nulle
- Jeux à 2 joueurs / Jeux à n joueurs

Typologie des jeux

- Jeux coopératifs et non coopératifs
- Jeux avec décisions simultanées ou séquentielles
- Jeux statiques ou répétés (en horizon fini ou infini)
- Jeux à information complète ou incomplète
- Jeux à somme nulle (strictement compétitifs) / Jeux à somme non-nulle
- Jeux à 2 joueurs / Jeux à n joueurs

Typologie des jeux

- Jeux coopératifs et non coopératifs
- Jeux avec décisions simultanées ou séquentielles
- Jeux statiques ou répétés (en horizon fini ou infini)
- Jeux à information complète ou incomplète
- Jeux à somme nulle (strictement compétitifs) / Jeux à somme non-nulle
- Jeux à 2 joueurs / Jeux à n joueurs

Définitions

- Une stratégie en théorie des jeux est un plan d'action complet spécifiant ce que le joueur fera à chaque étape de décision et face à chacune des situations pouvant survenir au cours du jeu.(Plans de production)
- Hypothèse forte sur la rationalité des joueurs :
  - Rationalité parfaite = capacité de compréhension du jeu, de calcul et de raisonnement par induction à rebours (backward induction),
  - Connaissance commune du jeu = je comprends le jeu, et je sais que les autres comprennent aussi le jeu et je sais qu'ils savent que je comprends le jeu et je sais qu'ils savent que je sais qu'ils comprennent aussi le jeu, etc

Définitions

- Une stratégie en théorie des jeux est un plan d'action complet spécifiant ce que le joueur fera à chaque étape de décision et face à chacune des situations pouvant survenir au cours du jeu.(Plans de production)
- Hypothèse forte sur la rationalité des joueurs :
  - Rationalité parfaite = capacité de compréhension du jeu, de calcul et de raisonnement par induction à rebours (backward induction),
  - Connaissance commune du jeu = je comprends le jeu, et je sais que les autres comprennent aussi le jeu et je sais qu'ils savent que je comprends le jeu et je sais qu'ils savent que je sais qu'ils comprennent aussi le jeu, etc

Définitions

- Une stratégie en théorie des jeux est un plan d'action complet spécifiant ce que le joueur fera à chaque étape de décision et face à chacune des situations pouvant survenir au cours du jeu.(Plans de production)
- Hypothèse forte sur la rationalité des joueurs :
  - Rationalité parfaite = capacité de compréhension du jeu, de calcul et de raisonnement par induction à rebours (backward induction),
  - Connaissance commune du jeu = je comprends le jeu, et je sais que les autres comprennent aussi le jeu et je sais qu'ils savent que je comprends le jeu et je sais qu'ils savent que je sais qu'ils comprennent aussi le jeu, etc

Définitions

- Une stratégie en théorie des jeux est un plan d'action complet spécifiant ce que le joueur fera à chaque étape de décision et face à chacune des situations pouvant survenir au cours du jeu.(Plans de production)
- Hypothèse forte sur la rationalité des joueurs :
  - Rationalité parfaite = capacité de compréhension du jeu, de calcul et de raisonnement par induction à rebours (backward induction),
  - Connaissance commune du jeu = je comprends le jeu, et je sais que les autres comprennent aussi le jeu et je sais qu'ils savent que je comprends le jeu et je sais qu'ils savent que je sais qu'ils comprennent aussi le jeu, etc

Comment représenter un jeu ?

- Sous forme d'arbre ou extensive : adaptée pour des jeux avec décisions séquentielles
- Sous forme matricielle : adaptée pour les jeux à deux joueurs avec des ensembles de stratégies contenant un nombre fini d'éléments
- sous forme normale : adaptée pour des jeux (statiques) avec décisions simultanées.

Comment représenter un jeu ?

- Sous forme d'arbre ou extensive : adaptée pour des jeux avec décisions séquentielles
- Sous forme matricielle : adaptée pour les jeux à deux joueurs avec des ensembles de stratégies contenant un nombre fini d'éléments
- sous forme normale : adaptée pour des jeux (statiques) avec décisions simultanées.

Comment représenter un jeu ?

- Sous forme d'arbre ou extensive : adaptée pour des jeux avec décisions séquentielles
- Sous forme matricielle : adaptée pour les jeux à deux joueurs avec des ensembles de stratégies contenant un nombre fini d'éléments
- sous forme normale : adaptée pour des jeux (statiques) avec décisions simultanées.

Comment représenter un jeu ?

- Sous forme d'arbre ou extensive : adaptée pour des jeux avec décisions séquentielles
- Sous forme matricielle : adaptée pour les jeux à deux joueurs avec des ensembles de stratégies contenant un nombre fini d'éléments
- sous forme normale : adaptée pour des jeux (statiques) avec décisions simultanées.

Forme extensive

La forme extensive (ou développée) est généralement utilisée dans les jeux qui comportent plusieurs coups (comme le jeu d'échecs) ; cette forme symbolise parfaitement l'idée de succession et d'enchaînements des coups. La forme extensive est caractérisée par l'arbre de Kuhn composé de :

- l'ensemble de nœuds représentant les différents coups ;
- un ensemble de branches représentant les alternatives à chaque nœud ;
- une fonction qui désigne à chaque nœud quel est le joueur qui doit jouer ;
- une fonction d'évaluation qui associe à chaque nœud terminal une vecteur de nombres représentant le gain de chaque joueur

Forme extensive

La forme extensive (ou développée) est généralement utilisée dans les jeux qui comportent plusieurs coups (comme le jeu d'échecs) ; cette forme symbolise parfaitement l'idée de succession et d'enchaînements des coups. La forme extensive est caractérisée par l'arbre de Kuhn composé de :

- l'ensemble de nœuds représentant les différents coups ;
- un ensemble de branches représentant les alternatives à chaque nœud ;
- une fonction qui désigne à chaque nœud quel est le joueur qui doit jouer ;
- une fonction d'évaluation qui associe à chaque nœud terminal une vecteur de nombres représentant le gain de chaque joueur

Forme extensive

La forme extensive (ou développée) est généralement utilisée dans les jeux qui comportent plusieurs coups (comme le jeu d'échecs) ; cette forme symbolise parfaitement l'idée de succession et d'enchaînements des coups. La forme extensive est caractérisée par l'arbre de Kuhn composé de :

- l'ensemble de nœuds représentant les différents coups ;
- un ensemble de branches représentant les alternatives à chaque nœud ;
- une fonction qui désigne à chaque nœud quel est le joueur qui doit jouer ;
- une fonction d'évaluation qui associe à chaque nœud terminal une vecteur de nombres représentant le gain de chaque joueur

Forme extensive

La forme extensive (ou développée) est généralement utilisée dans les jeux qui comportent plusieurs coups (comme le jeu d'échecs) ; cette forme symbolise parfaitement l'idée de succession et d'enchaînements des coups. La forme extensive est caractérisée par l'arbre de Kuhn composé de :

- l'ensemble de nœuds représentant les différents coups ;
- un ensemble de branches représentant les alternatives à chaque nœud ;
- une fonction qui désigne à chaque nœud quel est le joueur qui doit jouer ;
- une fonction d'évaluation qui associe à chaque nœud terminal une vecteur de nombres représentant le gain de chaque joueur

Forme extensive

La forme extensive (ou développée) est généralement utilisée dans les jeux qui comportent plusieurs coups (comme le jeu d'échecs) ; cette forme symbolise parfaitement l'idée de succession et d'enchaînements des coups. La forme extensive est caractérisée par l'arbre de Kuhn composé de :

- l'ensemble de nœuds représentant les différents coups ;
- un ensemble de branches représentant les alternatives à chaque nœud ;
- une fonction qui désigne à chaque nœud quel est le joueur qui doit jouer ;
- une fonction d'évaluation qui associe à chaque nœud terminal une vecteur de nombres représentant le gain de chaque joueur

Forme extensive

La forme extensive (ou développée) est généralement utilisée dans les jeux qui comportent plusieurs coups (comme le jeu d'échecs) ; cette forme symbolise parfaitement l'idée de succession et d'enchaînements des coups. La forme extensive est caractérisée par l'arbre de Kuhn composé de :

- l'ensemble de nœuds représentant les différents coups ;
- un ensemble de branches représentant les alternatives à chaque nœud ;
- une fonction qui désigne à chaque nœud quel est le joueur qui doit jouer ;
- une fonction d'évaluation qui associe à chaque nœud terminal une vecteur de nombres représentant le gain de chaque joueur

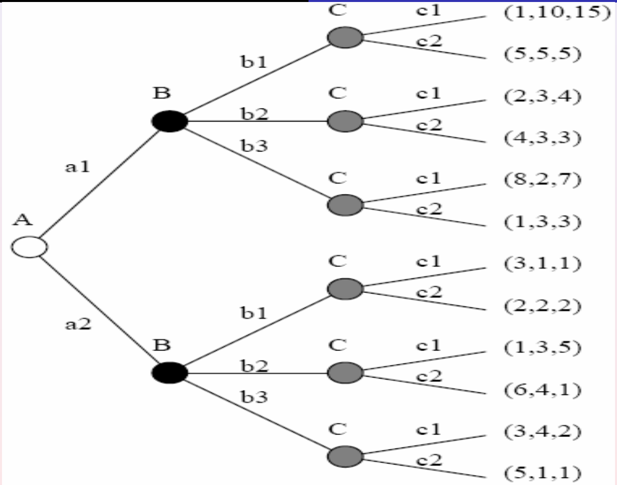

FIG.: Un arbre de Kuhn dans un jeu à 3 joueurs.

Forme Matricielle

Un jeu est dit fini, si chacun des joueurs dispose d'un ensemble **fini** de stratégies ; c'est à dire

$$\mid X_i \mid < \infty, \quad \forall i \in I.$$

Cette classe de jeux peut être entièrement caractérisée par des matrices des gains.

Représentation d'un jeu fini à deux joueurs

Dans le cas d'un jeu à 2 joueurs, où

$$\mid X \mid = m, \qquad \mid Y \mid = n$$

et

$$a_{ij} = f_1(x_i, y_j), \qquad b_{ij} = f_2(x_i, y_j).$$

	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n
x_1	(a_{11}, b_{11})	$\dots$	(a_{1j}, b_{1j})	$\cdots$	(a_{1n}, b_{1n})
$\dots$ x_i	$\dots$ (a_{i1}, b_{i1})	$\dots$ $\dots$	$\dots$ (a_{ij}, b_{ij})	$\cdots$ $\cdots$	$\cdot$ (a_{in}, b_{i1})
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\cdots$	$\dots$
x_m	(a_{m1}, b_{m1})	$\dots$	(a_{mj}, b_{mj})	$\cdots$	(a_{mn}, b_{mn})

A =

	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n
x_1	a_{11}	$\dots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
$\cdots$ x_i	$\dots$ a_{i1}	$\dots$ $\dots$	$\cdots$ a_{ij}	$\cdots$ $\cdots$	$\cdot$ a_{in}
$\cdots$	$\dots$	$\dots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}

B =

	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n
x_1	b_{11}	$\dots$	b_{1j}	$\cdots$	b_{1n}
$\cdots$ x_i	$\dots$ b_{i1}	$\dots$ $\dots$	$\cdots$ b_{ij}	$\cdots$ $\cdots$	$\cdot$ b_{in}
$\cdots$	$\dots$	$\dots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_m	b_{m1}	$\dots$	b_{mj}	$\cdots$	b_{mn}

Représentation d'un jeu fini à trois joueurs

Cas d'un jeu à trois joueurs, où chaque joueur a deux stratégies

	y_1	y_2
x_1	$f(x_1, y_1, z_1)$	$f(x_1, y_2, z_1)$
x_2	$f(x_2, y_1, z_1)$	$f(x_2, y_2, z_1)$

	y_1	y_2
x_1	$f(x_1, y_1, z_2)$	$f(x_1, y_2, z_2)$
x_2	$f(x_2, y_1, z_2)$	$f(x_2, y_2, z_2)$

Jeu à somme nulle

Un jeu à N joueurs est à somme nulle, si

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(x) = 0, \forall x \in X.$$

Un jeu fini à deux joueurs est à somme nulle, si

$$f_1(x_i, y_j) + f_2(x_i, y_j) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m; \forall j = 1, \ldots, m.$$

Jeu à somme nulle

Un jeu à N joueurs est à somme nulle, si

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(x) = 0, \forall x \in X.$$

Un jeu fini à deux joueurs est à somme nulle, si

$$f_1(x_i, y_j) + f_2(x_i, y_j) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m; \forall j = 1, \ldots, m.$$

En posant

$$a_{ij} = f_1(x_i, y_j) = -f_2(x_i, y_j), \quad \forall i = 1, \ldots, m; \forall j = 1, \ldots, m,$$

alors un jeu fini à deux joueurs à somme nulle peut être entièrement caractérisée par la matrice $A = (a_{ij})$ des gains du premier joueur.

Bataille des sexes

Un couple a l'intention d'aller à un spectacle une soirée. L'homme préfère aller voir le combat de Boxe tandis que la femme préfère l'Opéra.

Evidemment, chacun a intérêt à aller avec son époux ou son épouse au spectacle qui l'intéresse.

Mais si l'homme et la femme vont chacun de leur côté au spectacle qui les intéresse, leurs « gains » (degré de satisfaction) seront inférieurs à la perspective d'aller avec leur époux ou épouse même à un spectacle qui ne les intéresse pas.

Ils ne connaissent pas avant de prendre leur décision, le choix de leur partenaire, soit parce que le choix est simultané, soit parce qu'ils ne peuvent pas se voir avant le soir.

Bataille des sexes

Un couple a l'intention d'aller à un spectacle une soirée. L'homme préfère aller voir le combat de Boxe tandis que la femme préfère l'Opéra.

Evidemment, chacun a intérêt à aller avec son époux ou son épouse au spectacle qui l'intéresse.

Mais si l'homme et la femme vont chacun de leur côté au spectacle qui les intéresse, leurs « gains » (degré de satisfaction) seront inférieurs à la perspective d'aller avec leur époux ou épouse même à un spectacle qui ne les intéresse pas.

Ils ne connaissent pas avant de prendre leur décision, le choix de leur partenaire, soit parce que le choix est simultané, soit parce qu'ils ne peuvent pas se voir avant le soir.

Bataille des sexes

Un couple a l'intention d'aller à un spectacle une soirée. L'homme préfère aller voir le combat de Boxe tandis que la femme préfère l'Opéra.

Evidemment, chacun a intérêt à aller avec son époux ou son épouse au spectacle qui l'intéresse.

Mais si l'homme et la femme vont chacun de leur côté au spectacle qui les intéresse, leurs « gains » (degré de satisfaction) seront inférieurs à la perspective d'aller avec leur époux ou épouse même à un spectacle qui ne les intéresse pas.

Ils ne connaissent pas avant de prendre leur décision, le choix de leur partenaire, soit parce que le choix est simultané, soit parce qu'ils ne peuvent pas se voir avant le soir.

Bataille des sexes

Un couple a l'intention d'aller à un spectacle une soirée. L'homme préfère aller voir le combat de Boxe tandis que la femme préfère l'Opéra.
Evidemment, chacun a intérêt à aller avec son époux ou son épouse au spectacle qui l'intéresse.
Mais si l'homme et la femme vont chacun de leur côté au spectacle qui les intéresse, leurs « gains » (degré de satisfaction) seront inférieurs à la perspective d'aller avec leur époux ou épouse même à un spectacle qui ne les intéresse pas.
Ils ne connaissent pas avant de prendre leur décision, le choix de leur partenaire, soit parce que le choix est simultané, soit parce qu'ils ne peuvent pas se voir avant le soir.

Bataille des sexes

Un couple a l'intention d'aller à un spectacle une soirée. L'homme préfère aller voir le combat de Boxe tandis que la femme préfère l'Opéra.
Evidemment, chacun a intérêt à aller avec son époux ou son épouse au spectacle qui l'intéresse.
Mais si l'homme et la femme vont chacun de leur côté au spectacle qui les intéresse, leurs « gains » (degré de satisfaction) seront inférieurs à la perspective d'aller avec leur époux ou épouse même à un spectacle qui ne les intéresse pas.
Ils ne connaissent pas avant de prendre leur décision, le choix de leur partenaire, soit parce que le choix est simultané, soit parce qu'ils ne peuvent pas se voir avant le soir.

On obtient donc le tableau sous forme normale suivant :

	Boxe	Opéra
Boxe	(4,2)	(1,1)
Opéra	(0,0)	(2,4)

Les gains sont exprimés de la manière suivante : (Gain Homme, Gain Femme). Ex : Si le couple va voir la boxe : 4 points pour l'homme car il va voir son spectacle préféré et qu'il est avec sa femme. 2 points pour la femme, qui ne va pas voir son spectacle préféré, mais qui est avec son mari.

Deuxième variante

On reprend le même exemple, mais où pour la femme et pour l'homme, être avec l'autre est plus important que le lieu.

	Boxe	Opéra
Boxe	(4,2)	(0,0)
Opéra	(0,0)	(2,4)

Deuxième variante

On reprend le même exemple, mais où pour la femme et pour l'homme, être avec l'autre est plus important que le lieu.

	Boxe	Opéra
Boxe	(4,2)	(0,0)
Opéra	(0,0)	(2,4)

Dilemme du prisonnier

Ce jeu date des années cinquante, où il a été énoncé pour la première fois par Albert Tucker dans une conférence au département de psychologie à l'Université de Stanford. Depuis, plusieurs versions modifiées sont apparues selon les auteurs. Nous allons cependant donner la version la plus classique. Deux voleurs appelés Raoul et Gaston sont mis en examen dans une affaire de hold-up. Cependant, il n'existe pas de preuves pour les emprisonner.

Dilemme du prisonnier

Ce jeu date des années cinquante, où il a été énoncé pour la première fois par Albert Tucker dans une conférence au département de psychologie à l'Université de Stanford.
Depuis, plusieurs versions modifiées sont apparues selon les auteurs. Nous allons cependant donner la version la plus classique.
Deux voleurs appelés Raoul et Gaston sont mis en examen dans une affaire de hold-up. Cependant, il n'existe pas de preuves pour les emprisonner.

Dilemme du prisonnier

Ce jeu date des années cinquante, où il a été énoncé pour la première fois par Albert Tucker dans une conférence au département de psychologie à l'Université de Stanford. Depuis, plusieurs versions modifiées sont apparues selon les auteurs. Nous allons cependant donner la version la plus classique.

Deux voleurs appelés Raoul et Gaston sont mis en examen dans une affaire de hold-up. Cependant, il n'existe pas de preuves pour les emprisonner.

Dilemme du prisonnier

Ce jeu date des années cinquante, où il a été énoncé pour la première fois par Albert Tucker dans une conférence au département de psychologie à l'Université de Stanford. Depuis, plusieurs versions modifiées sont apparues selon les auteurs. Nous allons cependant donner la version la plus classique. Deux voleurs appelés Raoul et Gaston sont mis en examen dans une affaire de hold-up. Cependant, il n'existe pas de preuves pour les emprisonner.

Séparément, on leur propose alors le marché suivant :

- Si Gaston dénonce Raoul et que Raoul se tait, Gaston sera libre et Raoul écopera de 5 ans.
- Si Raoul dénonce Gaston et que Gaston se tait, Raoul sera libre et Gaston écopera de 5 ans.
- Si les 2 se taisent (Coopération), ils n'auront chacun que 1 an de prison.
- Si les 2 se dénoncent mutuellement (défection mutuelle), ils auront chacun 3 ans de prison.

Séparément, on leur propose alors le marché suivant :

- Si Gaston dénonce Raoul et que Raoul se tait, Gaston sera libre et Raoul écopera de 5 ans.
- Si Raoul dénonce Gaston et que Gaston se tait, Raoul sera libre et Gaston écopera de 5 ans.
- Si les 2 se taisent (Coopération), ils n'auront chacun que 1 an de prison.
- Si les 2 se dénoncent mutuellement (défection mutuelle), ils auront chacun 3 ans de prison.

Séparément, on leur propose alors le marché suivant :

- Si Gaston dénonce Raoul et que Raoul se tait, Gaston sera libre et Raoul écopera de 5 ans.
- Si Raoul dénonce Gaston et que Gaston se tait, Raoul sera libre et Gaston écopera de 5 ans.
- Si les 2 se taisent (Coopération), ils n'auront chacun que 1 an de prison.
- Si les 2 se dénoncent mutuellement (défection mutuelle), ils auront chacun 3 ans de prison.

Séparément, on leur propose alors le marché suivant :

- Si Gaston dénonce Raoul et que Raoul se tait, Gaston sera libre et Raoul écopera de 5 ans.
- Si Raoul dénonce Gaston et que Gaston se tait, Raoul sera libre et Gaston écopera de 5 ans.
- Si les 2 se taisent (Coopération), ils n'auront chacun que 1 an de prison.
- Si les 2 se dénoncent mutuellement (défection mutuelle), ils auront chacun 3 ans de prison.

Séparément, on leur propose alors le marché suivant :

- Si Gaston dénonce Raoul et que Raoul se tait, Gaston sera libre et Raoul écopera de 5 ans.
- Si Raoul dénonce Gaston et que Gaston se tait, Raoul sera libre et Gaston écopera de 5 ans.
- Si les 2 se taisent (Coopération), ils n'auront chacun que 1 an de prison.
- Si les 2 se dénoncent mutuellement (défection mutuelle), ils auront chacun 3 ans de prison.

Séparément, on leur propose alors le marché suivant :

- Si Gaston dénonce Raoul et que Raoul se tait, Gaston sera libre et Raoul écopera de 5 ans.
- Si Raoul dénonce Gaston et que Gaston se tait, Raoul sera libre et Gaston écopera de 5 ans.
- Si les 2 se taisent (Coopération), ils n'auront chacun que 1 an de prison.
- Si les 2 se dénoncent mutuellement (défection mutuelle), ils auront chacun 3 ans de prison.

	Silence	Trahison
Silence	(-1,-1)	(-5,0)
Trahison	(0,-5)	(-3,-3)

Il y a bien un dilemme : quelle que soit l'attitude de son complice, chacun a intérêt à dénoncer.
La rationalité individuelle (qui donne comme solution la défection) conduit à 2 défections (donc 3 ans chacun).
Cette solution s'écarte de la solution de coopération qui ne leur donnerait que 1 an chacun (ce que chacun préférerait).
Les deux complices auront 3 ans de prison, alors que s'ils s'étaient tus, ils n'auraient eu que 1 an.

	Silence	Trahison
Silence	(-1,-1)	(-5,0)
Trahison	(0,-5)	(-3,-3)

Il y a bien un dilemme : quelle que soit l'attitude de son complice, chacun a intérêt à dénoncer.

La rationalité individuelle (qui donne comme solution la défection) conduit à 2 défections (donc 3 ans chacun).

Cette solution s'écarte de la solution de coopération qui ne leur donnerait que 1 an chacun (ce que chacun préférerait).

Les deux complices auront 3 ans de prison, alors que s'ils s'étaient tus, ils n'auraient eu que 1 an.

	Silence	Trahison
Silence	(-1,-1)	(-5,0)
Trahison	(0,-5)	(-3,-3)

Il y a bien un dilemme : quelle que soit l'attitude de son complice, chacun a intérêt à dénoncer.
La rationalité individuelle (qui donne comme solution la défection) conduit à 2 défections (donc 3 ans chacun).
Cette solution s'écarte de la solution de coopération qui ne leur donnerait que 1 an chacun (ce que chacun préférerait).
Les deux complices auront 3 ans de prison, alors que s'ils s'étaient tus, ils n'auraient eu que 1 an.

	Silence	Trahison
Silence	(-1,-1)	(-5,0)
Trahison	(0,-5)	(-3,-3)

Il y a bien un dilemme : quelle que soit l'attitude de son complice, chacun a intérêt à dénoncer.
La rationalité individuelle (qui donne comme solution la défection) conduit à 2 défections (donc 3 ans chacun).
Cette solution s'écarte de la solution de coopération qui ne leur donnerait que 1 an chacun (ce que chacun préférerait).
Les deux complices auront 3 ans de prison, alors que s'ils s'étaient tus, ils n'auraient eu que 1 an.

	Silence	Trahison
Silence	(-1,-1)	(-5,0)
Trahison	(0,-5)	(-3,-3)

Il y a bien un dilemme : quelle que soit l'attitude de son complice, chacun a intérêt à dénoncer.
La rationalité individuelle (qui donne comme solution la défection) conduit à 2 défections (donc 3 ans chacun).
Cette solution s'écarte de la solution de coopération qui ne leur donnerait que 1 an chacun (ce que chacun préférerait).
Les deux complices auront 3 ans de prison, alors que s'ils s'étaient tus, ils n'auraient eu que 1 an.

Le jeu du dilemme du prisonnier est un exemple fondamental en économie. Ce jeu est important car il fait ressortir une tension entre l'intérêt individuel et l'intérêt collectif. De nombreuses situations présentent une structure similaire à celle du dilemme du prisonnier

Compétition en quantités dite de Cournot.

Le modèle de Cournot est l'un des modèles d'analyse micro-économique qui ont permis de mettre en lumière les éléments de la théorie des jeux.

Deux firmes, 1 et 2, produisent des biens identiques.

Chacune décide d'un niveau de production q_i à un coût $c_i(q_i)$. Le prix résultant de la loi de l'offre et de la demande est une fonction décroissante de la demande totale $q = q_1 + q_2$, appelée "loi de demande inverse, qu'on peut écrire : $p(q1 + q2)$.

Le problème peut être modélisé sous forme d'un jeu

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &= \{1,2\} \\
X_i &= \mathbb{R}_+ \\
f_1(q_1,q_2) &= q_1 p(q_1+q_2) - c_1(q_1) \\
f_2(q_1,q_2) &= q_2 p(q_1+q_2) - c_2(q_2)
\end{aligned}$$

Compétition en quantités dite de Cournot.

Le modèle de Cournot est l'un des modèles d'analyse micro-économique qui ont permis de mettre en lumière les éléments de la théorie des jeux.

Deux firmes, 1 et 2, produisent des biens identiques.

Chacune décide d'un niveau de production q_i à un coût $c_i(q_i)$. Le prix résultant de la loi de l'offre et de la demande est une fonction décroissante de la demande totale $q = q_1 + q_2$, appelée "loi de demande inverse, qu'on peut écrire : $p(q1 + q2)$.

Le problème peut être modélisé sous forme d'un jeu

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{1,2\} \\ X_i &= \mathbb{R}_+ \\ f_1(q_1,q_2) &= q_1 p(q_1+q_2) - c_1(q_1) \\ f_2(q_1,q_2) &= q_2 p(q_1+q_2) - c_2(q_2) \end{aligned}$$

Compétition en quantités dite de Cournot.

Le modèle de Cournot est l'un des modèles d'analyse micro-économique qui ont permis de mettre en lumière les éléments de la théorie des jeux.

Deux firmes, 1 et 2, produisent des biens identiques.

Chacune décide d'un niveau de production q_i à un coût $c_i(q_i)$. Le prix résultant de la loi de l'offre et de la demande est une fonction décroissante de la demande totale $q = q_1 + q_2$, appelée "loi de demande inverse, qu'on peut écrire : $p(q1 + q2)$.

Le problème peut être modélisé sous forme d'un jeu

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{1, 2\} \\ X_i &= \mathbb{R}_+ \\ f_1(q_1, q_2) &= q_1 p(q_1 + q_2) - c_1(q_1) \\ f_2(q_1, q_2) &= q_2 p(q_1 + q_2) - c_2(q_2) \end{aligned}$$

Compétition en quantités dite de Cournot.

Le modèle de Cournot est l'un des modèles d'analyse micro-économique qui ont permis de mettre en lumière les éléments de la théorie des jeux.
Deux firmes, 1 et 2, produisent des biens identiques.
Chacune décide d'un niveau de production q_i à un coût $c_i(q_i)$. Le prix résultant de la loi de l'offre et de la demande est une fonction décroissante de la demande totale $q = q_1 + q_2$, appelée "loi de demande inverse, qu'on peut écrire : $p(q1 + q2)$.
Le problème peut être modélisé sous forme d'un jeu

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{1,2\} \\ X_i &= \mathbb{R}_+ \\ f_1(q_1,q_2) &= q_1 p(q_1+q_2) - c_1(q_1) \\ f_2(q_1,q_2) &= q_2 p(q_1+q_2) - c_2(q_2) \end{aligned}$$

Compétition en quantités dite de Cournot.

Le modèle de Cournot est l'un des modèles d'analyse micro-économique qui ont permis de mettre en lumière les éléments de la théorie des jeux.
Deux firmes, 1 et 2, produisent des biens identiques.
Chacune décide d'un niveau de production q_i à un coût $c_i(q_i)$. Le prix résultant de la loi de l'offre et de la demande est une fonction décroissante de la demande totale $q = q_1 + q_2$, appelée "loi de demande inverse, qu'on peut écrire : $p(q1 + q2)$.
Le problème peut être modélisé sous forme d'un jeu

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{1, 2\} \\ X_i &= \mathbb{R}_+ \\ f_1(q_1, q_2) &= q_1 p(q_1 + q_2) - c_1(q_1) \\ f_2(q_1, q_2) &= q_2 p(q_1 + q_2) - c_2(q_2) \end{aligned}$$

Jeux Stratégiques

- des joueurs
- chacun possédant des stratégies
- le jeu est en un seul coup
- réalisé simultanément
- en pleine connaissance des coups possibles des autres
- chaque joueur est rationnel
- et vise à maximiser son gain.

Jeux Stratégiques

- des joueurs
- chacun possédant des stratégies
- le jeu est en un seul coup
- réalisé simultanément
- en pleine connaissance des coups possibles des autres
- chaque joueur est rationnel
- et vise à maximiser son gain.

Jeux Stratégiques

- des joueurs
- chacun possédant des stratégies
- le jeu est en un seul coup
- réalisé simultanément
- en pleine connaissance des coups possibles des autres
- chaque joueur est rationnel
- et vise à maximiser son gain.

Jeux Stratégiques

- des joueurs
- chacun possédant des stratégies
- le jeu est en un seul coup
- réalisé simultanément
- en pleine connaissance des coups possibles des autres
- chaque joueur est rationnel
- et vise à maximiser son gain.

Jeux Stratégiques

- des joueurs
- chacun possédant des stratégies
- le jeu est en un seul coup
- réalisé simultanément
- en pleine connaissance des coups possibles des autres
- chaque joueur est rationnel
- et vise à maximiser son gain.

Jeux Stratégiques

- des joueurs
- chacun possédant des stratégies
- le jeu est en un seul coup
- réalisé simultanément
- en pleine connaissance des coups possibles des autres
- chaque joueur est rationnel
- et vise à maximiser son gain.

Jeux Stratégiques

- des joueurs
- chacun possédant des stratégies
- le jeu est en un seul coup
- réalisé simultanément
- en pleine connaissance des coups possibles des autres
- chaque joueur est rationnel
- et vise à maximiser son gain.

Jeux Stratégiques

- des joueurs
- chacun possédant des stratégies
- le jeu est en un seul coup
- réalisé simultanément
- en pleine connaissance des coups possibles des autres
- chaque joueur est rationnel
- et vise à maximiser son gain.

Un jeu sous forme stratégique (normale) peut être représenté par un triplet

$$\langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$$

- $I = \{1, \dots, N\}$, $N \geq 2$ est l'ensemble des joueurs ou agents (preneurs de décisions)
- $X_i \subseteq \mathbb{R}_i^n$ l'ensemble des stratégies du joueur i
- $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ est l'ensemble des issues $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in X$
- $f_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction des gains qui attribue à chaque joueur et pour chaque configuration (issue du jeu) un gain.

Un jeu sous forme stratégique (normale) peut être représenté par un triplet

$$\langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$$

- $I = \{1, \ldots, N\}, N \geq 2$ est l'ensemble des joueurs ou agents (preneurs de décisions)
- $X_i \subseteq \mathbb{R}_i^n$ l'ensemble des stratégies du joueur i
- $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ est l'ensemble des issues $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X$
- $f_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction des gains qui attribue à chaque joueur et pour chaque configuration (issue du jeu) un gain.

Un jeu sous forme stratégique (normale) peut être représenté par un triplet

$$\langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$$

- $I = \{1, \dots, N\}, N \geq 2$ est l'ensemble des joueurs ou agents (preneurs de décisions)
- $X_i \subseteq \mathbb{R}_i^n$ l'ensemble des stratégies du joueur i
- $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ est l'ensemble des issues $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in X$
- $f_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction des gains qui attribue à chaque joueur et pour chaque configuration (issue du jeu) un gain.

Un jeu sous forme stratégique (normale) peut être représenté par un triplet

$$\langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$$

- $I = \{1, \ldots, N\}, N \geq 2$ est l'ensemble des joueurs ou agents (preneurs de décisions)
- $X_i \subseteq \mathbb{R}_i^n$ l'ensemble des stratégies du joueur i
- $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ est l'ensemble des issues $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X$
- $f_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction des gains qui attribue à chaque joueur et pour chaque configuration (issue du jeu) un gain.

Un jeu sous forme stratégique (normale) peut être représenté par un triplet

$$\langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$$

- $I = \{1, \ldots, N\}, N \geq 2$ est l'ensemble des joueurs ou agents (preneurs de décisions)
- $X_i \subseteq \mathbb{R}^n_i$ l'ensemble des stratégies du joueur i
- $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ est l'ensemble des issues $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X$
- $f_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction des gains qui attribue à chaque joueur et pour chaque configuration (issue du jeu) un gain.

Un jeu sous forme stratégique (normale) peut être représenté par un triplet

$$\langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$$

- $I = \{1, \ldots, N\}, N \geq 2$ est l'ensemble des joueurs ou agents (preneurs de décisions)
- $X_i \subseteq \mathbb{R}_i^n$ l'ensemble des stratégies du joueur i
- $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ est l'ensemble des issues $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X$
- $f_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction des gains qui attribue à chaque joueur et pour chaque configuration (issue du jeu) un gain.

Une règle de décision pour un joueur i est une correspondance

$$C_i(\cdot) : X_{-i} \longrightarrow X_i$$

qui définit un sous-ensemble $C_{-i}(x_{-i}) \subseteq X_i$ de ses stratégies qui correspondent à son objectif et en réponse aux choix x_{-i} des autres joueurs.

La correspondance C_i est aussi appelée : fonction de meilleure réponse du i-ème joueur

Notation : $(x_i, y_{-i}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_N)$

Une règle de décision pour un joueur i est une correspondance

$$C_i(\cdot) : X_{-i} \longrightarrow X_i$$

qui définit un sous-ensemble $C_{-i}(x_{-i}) \subseteq X_i$ de ses stratégies qui correspondent à son objectif et en réponse aux choix x_{-i} des autres joueurs.

La correspondance C_i est aussi appelée : fonction de meilleure réponse du i-ème joueur

Notation : $(x_i, y_{-i}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_N)$

Une règle de décision pour un joueur i est une correspondance

$$C_i(\cdot) : X_{-i} \longrightarrow X_i$$

qui définit un sous-ensemble $C_{-i}(x_{-i}) \subseteq X_i$ de ses stratégies qui correspondent à son objectif et en réponse aux choix x_{-i} des autres joueurs.

La correspondance C_i est aussi appelée : fonction de meilleure réponse du i-ème joueur

Notation : $(x_i, y_{-i}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_N)$

Example

(Règle de décision canonique)

$$C_i(y_{-i}) = \{x_i^* \in X_i : \sup_{x_i \in X_i} f_i(x_i, y_{-i}) = f_i(x_i^*, y_{-i})\}$$

Example

(Règle de décision de Wald) Chaque joueur choisit sa stratégie x_i^* selon la règle :

$$\inf_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i^*, x_{-i}) = \sup_{x_i \in X_i} \inf_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) = \alpha_i$$

x_i^* est appelée stratégie de sécurité et α_i le niveau de sécurité du i-ème joueur

Stratégie dominée

Nous commençons maintenant l'étude des prédictions des issues des jeux sous forme normale.

Etant donné un jeu, et en supposant que les joueurs sont rationnels, que peut-on prédire qu'ils vont jouer,

ou que peut-on prédire qu'ils ne vont pas jouer ? Si nous devions jouer dans un tel jeu, quel choix ferions-nous ?

Une stratégie dominée est une stratégie qui donne un paiement strictement moins bon que celui d'une autre stratégie donnée, ceci pour tout choix possible des adversaires.

Stratégie dominée

Nous commençons maintenant l'étude des prédictions des issues des jeux sous forme normale.
Etant donné un jeu, et en supposant que les joueurs sont rationnels, que peut-on prédire qu'ils vont jouer,
ou que peut-on prédire qu'ils ne vont pas jouer ? Si nous devions jouer dans un tel jeu, quel choix ferions-nous ?
Une stratégie dominée est une stratégie qui donne un paiement strictement moins bon que celui d'une autre stratégie donnée, ceci pour tout choix possible des adversaires.

Stratégie dominée

Nous commençons maintenant l'étude des prédictions des issues des jeux sous forme normale.
Etant donné un jeu, et en supposant que les joueurs sont rationnels, que peut-on prédire qu'ils vont jouer,
ou que peut-on prédire qu'ils ne vont pas jouer ? Si nous devions jouer dans un tel jeu, quel choix ferions-nous ?
Une stratégie dominée est une stratégie qui donne un paiement strictement moins bon que celui d'une autre stratégie donnée, ceci pour tout choix possible des adversaires.

Stratégie dominée

Nous commençons maintenant l'étude des prédictions des issues des jeux sous forme normale.
Etant donné un jeu, et en supposant que les joueurs sont rationnels, que peut-on prédire qu'ils vont jouer,
ou que peut-on prédire qu'ils ne vont pas jouer ? Si nous devions jouer dans un tel jeu, quel choix ferions-nous ?
Une stratégie dominée est une stratégie qui donne un paiement strictement moins bon que celui d'une autre stratégie donnée, ceci pour tout choix possible des adversaires.

Definition

Une stratégie $x_i \in X_i$ est dominée (strictement) s'il existe y_i telle que

$$\forall x_{-i} \in X_{-i}, \qquad f_i(x_i, x_{-i}) < f_i(y_i, x_{-i}).$$

On dit alors que y_i domine (strictement) x_i.

Un joueur rationnel ne devrait jamais jouer une stratégie dominée. En effet, il a le choix d'une autre stratégie dont il sait qu'elle peut lui ramener un meilleur gain, indépendamment des choix des autres joueurs.

Definition

Une stratégie $x_i \in X_i$ est dominée (strictement) s'il existe y_i telle que

$$\forall x_{-i} \in X_{-i}, \qquad f_i(x_i, x_{-i}) < f_i(y_i, x_{-i}).$$

On dit alors que y_i domine (strictement) x_i.

Un joueur rationnel ne devrait jamais jouer une stratégie dominée. En effet, il a le choix d'une autre stratégie dont il sait qu'elle peut lui ramener un meilleur gain, indépendamment des choix des autres joueurs.

	y_1	y_2
x_1	$(4,2)$	$(3,1)$
x_2	$(2,5)$	$(9,0)$

	y_1	y_2
x_1	$(4,2)$	(3,1)
x_2	$(2,5)$	(9,0)

	y_1	y_2
x_1	$(4,2)$	$(3,1)$
x_2	$(2,5)$	$(9,0)$

	y_1	y_2
x_1	$(4,2)$	$(3,1)$
x_2	$(2,5)$	$(9,0)$

	y_1
x_1	(4,2)
x_2	(2,5)

	y_1
x_1	(4,2)

	y_1
x_1	(4,2)
x_2	(2,5)

	y_1
x_1	(4,2)

Definition

Une stratégie x_i est strictement dominante, si pour toute autre stratégie $y_i \in X_i$, on a

$$\forall x_{-i} \in X_{-i}, \qquad f_i(x_i, x_{-i}) > f_i(y_i, x_{-i}).$$

Une stratégie dominante donne un meilleur paiement que toute autre stratégie, pour tous les choix des autres joueurs.

Definition

Une stratégie x_i est strictement dominante, si pour toute autre stratégie $y_i \in X_i$, on a

$$\forall x_{-i} \in X_{-i}, \qquad f_i(x_i, x_{-i}) > f_i(y_i, x_{-i}).$$

Une stratégie dominante donne un meilleur paiement que toute autre stratégie, pour tous les choix des autres joueurs.

Stratégie de sécurité

Considérons un jeu fini à deux joueurs. Le concept de sécurité dans un jeu est une sorte d'assurance contre le pire. En effet, la stratégie de sécurité assure au joueur un gain minimum contre toute stratégie des autres joueurs. La définition de cette stratégie dans le cas d'un jeu fini à deux joueurs avec des matrices des gains A et B sera :

Stratégie de sécurité

Considérons un jeu fini à deux joueurs. Le concept de sécurité dans un jeu est une sorte d'assurance contre le pire. En effet, la stratégie de sécurité assure au joueur un gain minimum contre toute stratégie des autres joueurs. La définition de cette stratégie dans le cas d'un jeu fini à deux joueurs avec des matrices des gains A et B sera :

Une stratégie $x_k \in X$ est une stratégie de sécurité pour le joueur 1, si

$$V_1 = \min_{j=1,\ldots,n} a_{kj} = \max_{i=1,\ldots,m} \min_{j=1,\ldots,n} a_{ij}.$$

Une stratégie $y_k \in Y$ est une stratégie de sécurité pour le joueur 2, si

$$V_2 = \min_{i=1,\ldots,m} b_{ik} = \max_{j=1,\ldots,n} \min_{i=1,\ldots,m} b_{ij}.$$

V_1 et V_2 sont appelés niveau de sécurité respectivement des joueurs 1 et 2.

Une stratégie $x_k \in X$ est une stratégie de sécurité pour le joueur 1, si

$$V_1 = \min_{j=1,\ldots,n} a_{kj} = \max_{i=1,\ldots,m} \min_{j=1,\ldots,n} a_{ij}.$$

Une stratégie $y_k \in Y$ est une stratégie de sécurité pour le joueur 2, si

$$V_2 = \min_{i=1,\ldots,m} b_{ik} = \max_{j=1,\ldots,n} \min_{i=1,\ldots,m} b_{ij}.$$

V_1 et V_2 sont appelés niveau de sécurité respectivement des joueurs 1 et 2.

Une stratégie $x_k \in X$ est une stratégie de sécurité pour le joueur 1, si

$$V_1 = \min_{j=1,\ldots,n} a_{kj} = \max_{i=1,\ldots,m} \min_{j=1,\ldots,n} a_{ij}.$$

Une stratégie $y_k \in Y$ est une stratégie de sécurité pour le joueur 2, si

$$V_2 = \min_{i=1,\ldots,m} b_{ik} = \max_{j=1,\ldots,n} \min_{i=1,\ldots,m} b_{ij}.$$

V_1 et V_2 sont appelés niveau de sécurité respectivement des joueurs 1 et 2.

Exemple

Reprenons l'exemple de la bataille des sexes

	Boxe	Opéra
Boxe	(4,2)	(0,0)
Opéra	(0,0)	(2,4)

Les niveaux de sécurité des 2 joueurs sont : $V_1 = V_2 = 0$.

Equilibre de Nash

Definition

Une situation $\bar{x} \in X$ est un équilibre de Nash pour le jeu (J) si : $\forall i \in I$, $\forall y_i \in X_i$,

$$f_i(y_i, \bar{x}_{-i}) \leqq f_i(\bar{x}).$$

L'issue $\bar{x}$ de l'équilibre de Nash est stable dans le sens où : aucun joueur n'a intérêt à s'écarter seul de la stratégie appartenant à cet équilibre.

Equilibre de Nash

Definition

Une situation $\bar{x} \in X$ est un équilibre de Nash pour le jeu (J) si : $\forall i \in I,\ \forall y_i \in X_i$,

$$f_i(y_i, \bar{x}_{-i}) \leq f_i(\bar{x}).$$

L'issue $\bar{x}$ de l'équilibre de Nash est stable dans le sens où : aucun joueur n'a intérêt à s'écarter seul de la stratégie appartenant à cet équilibre.

1) L'équilibre de Nash est individuellement rationnel, c-à-d

$$f_i(x^*) \geq V_i, \quad \forall i \in I.$$

2) L'équilibre de Nash est une situation de non regret,puisque dans cet équilibre, chaque joueur ne regrette pas le choix qu'il a effectué après avoir constaté celui des autres.

3) Un jeu peut ne pas posséder ou posséder plusieurs équilibres de Nash qui procurent des gains différentset cette situation engendre le problème : quel équilibre choisir ?

4) L'équilibre de Nash n'est pas toujours collectivement rationnel.

1) L'équilibre de Nash est individuellement rationnel, c-à-d

$$f_i(x^*) \geq V_i, \quad \forall i \in I.$$

2) L'équilibre de Nash est une situation de non regret, puisque dans cet équilibre, chaque joueur ne regrette pas le choix qu'il a effectué après avoir constaté celui des autres.

3) Un jeu peut ne pas posséder ou posséder plusieurs équilibres de Nash qui procurent des gains différents et cette situation engendre le problème : quel équilibre choisir ?

4) L'équilibre de Nash n'est pas toujours collectivement rationnel.

1) L'équilibre de Nash est individuellement rationnel, c-à-d

$$f_i(x^*) \geq V_i, \quad \forall i \in I.$$

2) L'équilibre de Nash est une situation de non regret,puisque dans cet équilibre, chaque joueur ne regrette pas le choix qu'il a effectué après avoir constaté celui des autres.

3) Un jeu peut ne pas posséder ou posséder plusieurs équilibres de Nash qui procurent des gains différentset cette situation engendre le problème : quel équilibre choisir ?

4) L'équilibre de Nash n'est pas toujours collectivement rationnel.

1) L'équilibre de Nash est individuellement rationnel, c-à-d

$$f_i(x^*) \geq V_i, \quad \forall i \in I.$$

2) L'équilibre de Nash est une situation de non regret,puisque dans cet équilibre, chaque joueur ne regrette pas le choix qu'il a effectué après avoir constaté celui des autres.

3) Un jeu peut ne pas posséder ou posséder plusieurs équilibres de Nash qui procurent des gains différentset cette situation engendre le problème : quel équilibre choisir ?

4) L'équilibre de Nash n'est pas toujours collectivement rationnel.

1) L'équilibre de Nash est individuellement rationnel, c-à-d

$$f_i(x^*) \geq V_i, \quad \forall i \in I.$$

2) L'équilibre de Nash est une situation de non regret,puisque dans cet équilibre, chaque joueur ne regrette pas le choix qu'il a effectué après avoir constaté celui des autres.
3) Un jeu peut ne pas posséder ou posséder plusieurs équilibres de Nash qui procurent des gains différentset cette situation engendre le problème : quel équilibre choisir ?
4) L'équilibre de Nash n'est pas toujours collectivement rationnel.

1) L'équilibre de Nash est individuellement rationnel, c-à-d

$$f_i(x^*) \geq V_i, \quad \forall i \in I.$$

2) L'équilibre de Nash est une situation de non regret,puisque dans cet équilibre, chaque joueur ne regrette pas le choix qu'il a effectué après avoir constaté celui des autres.
3) Un jeu peut ne pas posséder ou posséder plusieurs équilibres de Nash qui procurent des gains différentset cette situation engendre le problème : quel équilibre choisir ?
4) L'équilibre de Nash n'est pas toujours collectivement rationnel.

1) L'équilibre de Nash est individuellement rationnel, c-à-d

$$f_i(x^*) \geq V_i, \quad \forall i \in I.$$

2) L'équilibre de Nash est une situation de non regret,puisque dans cet équilibre, chaque joueur ne regrette pas le choix qu'il a effectué après avoir constaté celui des autres.
3) Un jeu peut ne pas posséder ou posséder plusieurs équilibres de Nash qui procurent des gains différentset cette situation engendre le problème : quel équilibre choisir ?
4) L'équilibre de Nash n'est pas toujours collectivement rationnel.

1) L'équilibre de Nash est individuellement rationnel, c-à-d

$$f_i(x^*) \geq V_i, \quad \forall i \in I.$$

2) L'équilibre de Nash est une situation de non regret,puisque dans cet équilibre, chaque joueur ne regrette pas le choix qu'il a effectué après avoir constaté celui des autres.
3) Un jeu peut ne pas posséder ou posséder plusieurs équilibres de Nash qui procurent des gains différentset cette situation engendre le problème : quel équilibre choisir ?
4) L'équilibre de Nash n'est pas toujours collectivement rationnel.

Conditions d'existence

En utilisant les règles canoniques de décision, on peut ramener la définition de l'équilibre de Nash à :

Definition

Une situation $\bar{x} \in X$ est un équilibre de Nash pour le jeu (J) si :

$$\forall i \in I \qquad \bar{x}_i \in C_i(\bar{x}_{-i}).$$

En posant

$$C(x) = \prod_{i=1}^{N} C_i(x_{-i}) \forall x \in X$$

alors on aura :
$x^* \in X$ est un équilibre de Nash si et ssi $x^* \in C(x^*)$.

Conditions d'existence

En utilisant les règles canoniques de décision, on peut ramener la définition de l'équilibre de Nash à :

Definition

Une situation $\bar{x} \in X$ est un équilibre de Nash pour le jeu (J) si :

$$\forall i \in I \quad \bar{x}_i \in C_i(\bar{x}_{-i}).$$

En posant

$$C(x) = \prod_{i=1}^{N} C_i(x_{-i}) \forall x \in X$$

alors on aura :

$x^* \in X$ est un équilibre de Nash si et ssi $x^* \in C(x^*)$.

Conditions d'existence

En utilisant les règles canoniques de décision, on peut ramener la définition de l'équilibre de Nash à :

Definition

Une situation $\bar{x} \in X$ est un équilibre de Nash pour le jeu (J) si :

$$\forall i \in I \quad \bar{x}_i \in C_i(\bar{x}_{-i}).$$

En posant

$$C(x) = \prod_{i=1}^{N} C_i(x_{-i}) \forall x \in X$$

alors on aura :

$x^* \in X$ est un équilibre de Nash si et ssi $x^* \in C(x^*)$.

Conditions d'existence

En utilisant les règles canoniques de décision, on peut ramener la définition de l'équilibre de Nash à :

Definition

Une situation $\bar{x} \in X$ est un équilibre de Nash pour le jeu (J) si :

$$\forall i \in I \qquad \bar{x}_i \in C_i(\bar{x}_{-i}).$$

En posant

$$C(x) = \prod_{i=1}^{N} C_i(x_{-i}) \forall x \in X$$

alors on aura :

$x^* \in X$ est un équilibre de Nash si et ssi $x^* \in C(x^*)$.

Equilibre de Nash dans un jeu bi-matriciel

Une situation $(x_i^*, y_j^*) \in X \times Y$ est un équilibre de Nash dans une jeu bi-matriciel (A, B), si

$$a_{ij} \geq a_{kj}, \quad \forall k \in \{1, \ldots, m\};$$

$$b_{ij} \geq b_{ik}, \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Stratégies mixtes

Un des problèmes inhérents au concept d'équilibre de Nash est que certains jeux n'admettent pas un tel équilibre. Considérons l'exemple du jeu d'enfant : Pierre, Papier, Ciseaux :

Stratégies mixtes

Un des problèmes inhérents au concept d'équilibre de Nash est que certains jeux n'admettent pas un tel équilibre.Considérons l'exemple du jeu d'enfant : Pierre, Papier, Ciseaux :

	Pi	Pa	Ci
Pi	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
Pa	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
Ci	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Le jeu n'admet pas d'équilibre de Nash, parce que chaque joueur a intérêt à cacher sa stratégie ou à bluffer. La notion d'équilibre de Nash suppose que chaque joueur connaît les stratégies des autres joueurs.

Dans les jeux "pile ou face" ou "tirer un penalty", ou "bluff au poker", on n'utilise pas toujours la même stratégie, et on ne connaît pas non plus à l'avance celle de l'adversaire.

	Pile	Face
Pile	(1,-1)	(-1,1)
Face	(-1,1)	(1,-1)

Les stratégies mixtes, ou aléatoires, vont permettre de représenter ces possibilités de bluff, ou de jouer aléatoirement.

Définition

- Une stratégie pure du joueur i est un plan d'action qui prescrit une action de ce joueur pour chaque fois qu'il est susceptible de jouer. On a noté par X_i l'ensemble des stratégies pures du joueur i et par x_i une stratégie pure de ce joueur.
- Une stratégie mixte du joueur i est une distribution de probabilités définie sur l'ensemble X_i des stratégies pures du joueur.

Définition

- Une stratégie pure du joueur i est un plan d'action qui prescrit une action de ce joueur pour chaque fois qu'il est susceptible de jouer.On a noté par X_i l'ensemble des stratégies pures du joueur i et par x_i une stratégie pure de ce joueur.
- Une stratégie mixte du joueur i est une distribution de probabilités définie sur l'ensemble X_i des stratégies pures du joueur.

Définition

- Une stratégie pure du joueur i est un plan d'action qui prescrit une action de ce joueur pour chaque fois qu'il est susceptible de jouer.On a noté par X_i l'ensemble des stratégies pures du joueur i et par x_i une stratégie pure de ce joueur.
- Une stratégie mixte du joueur i est une distribution de probabilités définie sur l'ensemble X_i des stratégies pures du joueur.

Si $crad(X_i) = n < \infty$, alors l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i est

$$\Delta^i = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_j \geq 0, \forall j = 1, ..., n; \quad \sum_{j=1}^{n} = 1\}$$

où α_j est la probabilité que le joueur choisisse sa stratégie pure x_j.

Fonction de paiement

Dans un jeu matriciel A, où les deux joueurs utilisent des stratégies mixtes, alors la fonction de paiement du premier joueur est définie par l'espérance mathématique

$$f(\alpha, \beta) = \alpha^T A \beta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_i \beta_j,$$

si le joueur 1 utilise sa stratégie mixte $\alpha \in \Delta_m^1$ et le joueur 2 joue sa stratégie mixte $\beta \in \Delta_n^2$.

L'aide multicritère à la décision vise, comme son nom l'indique, à fournir à un décideur des outils lui permettant de progresser dans la résolution d'un problème de décision où plusieurs points de vue, souvent contradictoires, doivent être pris en compte.

La première constatation qui doit être faite, lorsqu'on aborde un tel problème est qu'il n'existe pas, en général, une décision (solution, action, ...) qui soit la meilleure simultanément pour tous les points de vue.

Le mot "optimisation" n'a donc plus de sens dans un tel contexte ; contrairement aux techniques classiques de la Recherche Opérationnelle, les méthodes multicritères ne fournissent pas de solutions objectivement les meilleures (ces solutions n'existent pas). C'est pourquoi le mot Aide paraît important.

L'aide multicritère à la décision vise, comme son nom l'indique, à fournir à un décideur des outils lui permettant de progresser dans la résolution d'un problème de décision où plusieurs points de vue, souvent contradictoires, doivent être pris en compte.
La première constatation qui doit être faite, lorsqu'on aborde un tel problème est qu'il n'existe pas, en général, une décision (solution, action, ...) qui soit la meilleure simultanément pour tous les points de vue.
Le mot "optimisation" n'a donc plus de sens dans un tel contexte ; contrairement aux techniques classiques de la Recherche Opérationnelle, les méthodes multicritères ne fournissent pas de solutions objectivement les meilleures (ces solutions n'existent pas). C'est pourquoi le mot Aide paraît important.

L'aide multicritère à la décision vise, comme son nom l'indique, à fournir à un décideur des outils lui permettant de progresser dans la résolution d'un problème de décision où plusieurs points de vue, souvent contradictoires, doivent être pris en compte.
La première constatation qui doit être faite, lorsqu'on aborde un tel problème est qu'il n'existe pas, en général, une décision (solution, action, ...) qui soit la meilleure simultanément pour tous les points de vue.
Le mot "optimisation" n'a donc plus de sens dans un tel contexte ; contrairement aux techniques classiques de la Recherche Opérationnelle, les méthodes multicritères ne fournissent pas de solutions objectivement les meilleures (ces solutions n'existent pas). C'est pourquoi le mot Aide paraît important.

L'aide multicritère à la décision vise, comme son nom l'indique, à fournir à un décideur des outils lui permettant de progresser dans la résolution d'un problème de décision où plusieurs points de vue, souvent contradictoires, doivent être pris en compte.
La première constatation qui doit être faite, lorsqu'on aborde un tel problème est qu'il n'existe pas, en général, une décision (solution, action, ...) qui soit la meilleure simultanément pour tous les points de vue.
Le mot "optimisation" n'a donc plus de sens dans un tel contexte ; contrairement aux techniques classiques de la Recherche Opérationnelle, les méthodes multicritères ne fournissent pas de solutions objectivement les meilleures (ces solutions n'existent pas). C'est pourquoi le mot Aide paraît important.

Les spécialistes de l'aide multicritère à la décision ont pris l'habitude de subdiviser les méthodes en trois grandes familles :

- la théorie de l'utilité multiattribut,
- les méthodes de surclassement,
- les méthodes interactives.

Les spécialistes de l'aide multicritère à la décision ont pris l'habitude de subdiviser les méthodes en trois grandes familles :

- la théorie de l'utilité multiattribut,
- les méthodes de surclassement,
- les méthodes interactives.

Les spécialistes de l'aide multicritère à la décision ont pris l'habitude de subdiviser les méthodes en trois grandes familles :

- la théorie de l'utilité multiattribut,
- les méthodes de surclassement,
- les méthodes interactives.

Les spécialistes de l'aide multicritère à la décision ont pris l'habitude de subdiviser les méthodes en trois grandes familles :

- la théorie de l'utilité multiattribut,
- les méthodes de surclassement,
- les méthodes interactives.

Les spécialistes de l'aide multicritère à la décision ont pris l'habitude de subdiviser les méthodes en trois grandes familles :

- la théorie de l'utilité multiattribut,
- les méthodes de surclassement,
- les méthodes interactives.

B. Roy (1985) les appelle respectivement

- approche du critère unique de synthèse évacuant toute incomparabilité,
- approche du surclassement de synthèse , acceptant l'incomparabilité,
- approche du jugement local interactif avec itération essai-erreur ,

tandis qu'A.Scharling (1985) parle des méthodes d'agrégation respectivement complète, partielles et locales .

B. Roy (1985) les appelle respectivement

- approche du critère unique de synthèse évacuant toute incomparabilité,
- approche du surclassement de synthèse , acceptant l'incomparabilité,
- approche du jugement local interactif avec iteraction essai-erreur ,

tandis qu'A.Scharling (1985) parle des méthodes d'agrégation respectivement complète, partielles et locales .

B. Roy (1985) les appelle respectivement

- approche du critère unique de synthèse évacuant toute incomparabilité,
- approche du surclassement de synthèse , acceptant l'incomparabilité,
- approche du jugement local interactif avec iteraction essai-erreur ,

tandis qu'A.Scharling (1985) parle des méthodes d'agrégation respectivement complète, partielles et locales .

B. Roy (1985) les appelle respectivement

- approche du critère unique de synthèse évacuant toute incomparabilité,
- approche du surclassement de synthèse , acceptant l'incomparabilité,
- approche du jugement local interactif avec iteraction essai-erreur ,

tandis qu'A.Scharling (1985) parle des méthodes d'agrégation respectivement complète, partielles et locales .

B. Roy (1985) les appelle respectivement

- approche du critère unique de synthèse évacuant toute incomparabilité,
- approche du surclassement de synthèse , acceptant l'incomparabilité,
- approche du jugement local interactif avec iteration essai-erreur ,

tandis qu'A.Scharling (1985) parle des méthodes d'agrégation respectivement complète, partielles et locales .

B. Roy (1985) les appelle respectivement

- approche du critère unique de synthèse évacuant toute incomparabilité,
- approche du surclassement de synthèse , acceptant l'incomparabilité,
- approche du jugement local interactif avec iteration essai-erreur ,

tandis qu'A.Scharling (1985) parle des méthodes d'agrégation respectivement complète, partielles et locales .

Un problème multicritère est caractérisé par le couple

$$\langle X,\ f(.)\rangle \tag{1}$$

où

- $X \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des décisions ;
- $f(\cdot) :\longrightarrow \mathbb{R}^k$ est une fonction vectorielle avec k fonctions objectifs $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R},\ i \in K = \{1, \dots, k\}$

Un problème multicritère est caractérisé par le couple

$$\langle X,\ f(.)\rangle \tag{1}$$

où

- $X \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des décisions ;
- $f(\cdot) :\longrightarrow \mathbb{R}^k$ est une fonction vectorielle avec k fonctions objectifs $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R},\ \ i \in K = \{1, \ldots, k\}$

Un problème multicritère est caractérisé par le couple

$$\langle X,\ f(.)\rangle \tag{1}$$

où

- $X \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des décisions ;
- $f(\cdot) :\longrightarrow \mathbb{R}^k$ est une fonction vectorielle avec k fonctions objectifs $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R},\ \ i \in K = \{1, \ldots, k\}$

Un problème multicritère est caractérisé par le couple

$$\langle X,\ f(.)\rangle \tag{1}$$

où

- $X \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des décisions ;
- $f(\cdot) :\longrightarrow \mathbb{R}^k$ est une fonction vectorielle avec k fonctions objectifs $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R},\ \ i \in K = \{1, \ldots, k\}$

Soient $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$, $b = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$. On notera

$$a \geqq b \Longleftrightarrow a_i \geqq b_i \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

$$a \geq b \Longleftrightarrow a \geqq b \text{ and } a \neq b.$$

$$a > b \Longleftrightarrow a_i > b_i \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Definition

(Optimalité de Slater)
On dit que $x^S \in X$ est une *décision maximale* de Slater (faiblement efficace), s'il n'existe pas de décision $x \in X$ qui vérifie l'inégalité vectorielle

$$f(x) > f(x^S). \tag{2}$$

Definition

(Optimalité de Pareto)
On dit que $x^P \in X$ est une *décision maximale* de Pareto, dite aussi efficace, s'il n'existe pas de décision $x \in X$ qui vérifie l'inégalité vectorielle

$$f(x) \geq f(x^P). \tag{3}$$

Definition

(Optimalité de Geoffrion) On dit que $x^G \in X$ est une *décision maximale* de Geoffrion, dite aussi proprement efficace, si :

1. x^G est une décision maximale de Pareto,
2. Il existe un nombre réel $M > 0$ tel que l'inégalité

$$f_i(x) - f_i(x^G) \leq M \left[f_j(x^G) - f_j(x) \right] \tag{4}$$

   est vérifiée pour tout les $i \in I$ et $x \in X$ tels que $f_i(x) > f_i(x^G)$ et pour un certain $j \in I$ tel que $f_j(x) < f_j(x^G)$.

Definition

(Optimalité de Geoffrion) On dit que $x^G \in X$ est une *décision maximale* de Geoffrion, dite aussi proprement efficace, si :

1. x^G est une décision maximale de Pareto,
2. Il existe un nombre réel $M > 0$ tel que l'inégalité

$$f_i(x) - f_i(x^G) \leqq M \left[f_j(x^G) - f_j(x) \right] \tag{4}$$

   est vérifiée pour tout les $i \in I$ et $x \in X$ tels que $f_i(x) > f_i(x^G)$ et pour un certain $j \in I$ tel que $f_j(x) < f_j(x^G)$.

Propriété 1 *Si l'on note respectivement par X^S, X^P et X^G les ensembles des décisions maximales de Slater, de Pareto et de Geoffrion, alors on a les inclusions suivantes :*

$$X^G \subseteq X^P \subseteq X^S.$$

D. Blackwell.
An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs.
Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.

L.S. Shapley.
Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs.
Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.

K. Bergstresser and P.L. Yu.
Domination structure and multicriteria problems in N-person games.
Theory Decision, 8 : 5–48, 1972.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in two-person multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 63 : 167–189, 1989.

D. Blackwell.
An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs.
Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.

L.S. Shapley.
Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs.
Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.

K. Bergstresser and P.L. Yu.
Domination structure and multicriteria problems in N-person games.
Theory Decision, 8 : 5–48, 1972.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in two-person multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 63 : 167–189, 1989.

D. Blackwell.
An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs.
Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.

L.S. Shapley.
Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs.
Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.

K. Bergstresser and P.L. Yu.
Domination structure and multicriteria problems in N-person games.
Theory Decision, 8 : 5–48, 1972.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in two-person multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 63 : 167–189, 1989.

D. Blackwell.
An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs.
Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.

L.S. Shapley.
Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs.
Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.

K. Bergstresser and P.L. Yu.
Domination structure and multicriteria problems in N-person games.
Theory Decision, 8 : 5–48, 1972.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in two-person multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 63 : 167–189, 1989.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in continuous-kernel multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 69 : 543–553, 1991.

F.R. Fernandez and J. Puerto
Vector linear programming in zero-sum multicriteria matrix games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 89 (2) : 115–127, 1996.

N. Shashishekhap and D. Ghose and L. Anand and U.R. Prasad.
A survey of solution concepts in multicriteria games.
J. Indian Inst. Sci., 75 (2) : 141–174, 1995.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in continuous-kernel multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 69 : 543–553, 1991.

F.R. Fernandez and J. Puerto
Vector linear programming in zero-sum multicriteria matrix games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 89 (2) : 115–127, 1996.

N. Shashishekhap and D. Ghose and L. Anand and U.R. Prasad.
A survey of solution concepts in multicriteria games.
J. Indian Inst. Sci., 75 (2) : 141–174, 1995.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in continuous-kernel multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 69 : 543–553, 1991.

F.R. Fernandez and J. Puerto
Vector linear programming in zero-sum multicriteria matrix games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 89 (2) : 115–127, 1996.

N. Shashishekhap and D. Ghose and L. Anand and U.R. Prasad.
A survey of solution concepts in multicriteria games.
J. Indian Inst. Sci., 75 (2) : 141–174, 1995.

J.F. Nash.
Non Cooperative Games
Annals. Math., 54 : 286–295, 1951.

A. Haurie.
On Pareto optimal decisions for a coalition of a subset of players
IEEE Trans, AC(18) :144–148, 1973.

J. Goffin and A. Haurie.
Necessary conditions and sufficient conditions for Pareto optimality in multicriteria perturbed system
Proc. 5th IFIP Conf. on Optimiz., 184–193, 1973.

J.F. Nash.
Non Cooperative Games
Annals. Math., 54 : 286–295, 1951.

A. Haurie.
On Pareto optimal decisions for a coalition of a subset of players
IEEE Trans, AC(18) :144–148, 1973.

J. Goffin and A. Haurie.
Necessary conditions and sufficient conditions for Pareto optimality in multicriteria perturbed system
Proc. 5th IFIP Conf. on Optimiz., 184–193, 1973.

J.F. Nash.
Non Cooperative Games
Annals. Math., 54 : 286–295, 1951.

A. Haurie.
On Pareto optimal decisions for a coalition of a subset of players
IEEE Trans, AC(18) :144–148, 1973.

J. Goffin and A. Haurie.
Necessary conditions and sufficient conditions for Pareto optimality in multicriteria perturbed system
Proc. 5th IFIP Conf. on Optimiz., 184–193, 1973.

M. Voorneveld and S. Grahn and M. Dufwenberg
Ideal Equilibria in Noncooperative Multicriteria Games
Mathematical Methods of Operations Research, 52 : 65-77, 2000.

J. Yu and and GXZ. Yuan
The Study of Equilibria for Multiobjective Games by Fixed Point and Ky Fan Minimax Inequality Methods
Computers Math. Applic., 35 : 17-24, 1998.

QH. Ansari and S. Schaible and JC. Yao
The System of Generalized Vector Equilibrium Problems with Applications
Journal of Global Optimization, 22 :3-16, 2002.

J. Von Neumann and O. Morgenstern
Theory of Games and Economic Behavior
Princeton University Press, 1944.

M. Voorneveld and S. Grahn and M. Dufwenberg
Ideal Equilibria in Noncooperative Multicriteria Games
Mathematical Methods of Operations Research, 52 : 65-77, 2000.

J. Yu and and GXZ. Yuan
The Study of Equilibria for Multiobjective Games by Fixed Point and Ky Fan Minimax Inequality Methods
Computers Math. Applic., 35 : 17-24, 1998.

QH. Ansari and S. Schaible and JC. Yao
The System of Generalized Vector Equilibrium Problems with Applications
Journal of Global Optimization, 22 :3-16, 2002.

J. Von Neumann and O. Morgenstern
Theory of Games and Economic Behavior
Princeton University Press, 1944.

M. Voorneveld and S. Grahn and M. Dufwenberg
Ideal Equilibria in Noncooperative Multicriteria Games
Mathematical Methods of Operations Research, 52 : 65-77, 2000.

J. Yu and and GXZ. Yuan
The Study of Equilibria for Multiobjective Games by Fixed Point and Ky Fan Minimax Inequality Methods
Computers Math. Applic., 35 : 17-24, 1998.

QH. Ansari and S. Schaible and JC. Yao
The System of Generalized Vector Equilibrium Problems with Applications
Journal of Global Optimization, 22 :3-16, 2002.

J. Von Neumann and O. Morgenstern
Theory of Games and Economic Behavior
Princeton University Press, 1944.

M. Voorneveld and S. Grahn and M. Dufwenberg
Ideal Equilibria in Noncooperative Multicriteria Games
Mathematical Methods of Operations Research, 52 : 65-77, 2000.

J. Yu and and GXZ. Yuan
The Study of Equilibria for Multiobjective Games by Fixed Point and Ky Fan Minimax Inequality Methods
Computers Math. Applic., 35 : 17-24, 1998.

QH. Ansari and S. Schaible and JC. Yao
The System of Generalized Vector Equilibrium Problems with Applications
Journal of Global Optimization, 22 :3-16, 2002.

J. Von Neumann and O. Morgenstern
Theory of Games and Economic Behavior
Princeton University Press, 1944.