Théorie du contrôle optimal et applications en aéronautique

Emmanuel Trélat

Université d'Orléans, UFR Sciences
Fédération Denis Poisson
Math., Labo. MAPMO, UMR 6628,
Route de Chartres, BP 6759, 45067 Orléans Cedex 2, France
emmanuel.trelat@univ-orleans.fr

Abstract. Dans cet exposé, on s'intéresse au contrôle optimal de systèmes modélisés par des équations différentielles, en dimension finie. Pour de tels systèmes, de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

où $x(t)$ est l'état et $u(t)$ est le contrôle (vérifiant éventuellement certaines contraintes), le but est d'amener le système d'un ensemble initial à un certain ensemble final, en minimisant de plus un critère d'optimisation appelé le coût.

Du point de vue théorique, le Principe du Maximum de Pontryagin donne des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre, en affirmant que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale, c'est-à-dire la solution d'un certain système Hamiltonien (version dans le cotangent des équations d'Euler-Lagrange). Réciproquement, la projection d'une extrémale n'étant pas forcément optimale, on donne des conditions d'ordre deux, utilisant la notion de premier point conjugué, point où la trajectoire perd son optimalité.

Du point de vue numérique, pour résoudre un problème de contrôle optimal, on a l'habitude de faire la distinction entre deux types de méthodes : les méthodes directes d'une part, qui consistent à tout discrétiser (état + contrôle), et se ramènent à un problème d'optimisation non linéaire, pouvant se résoudre par exemple par des méthodes de type SQP ; d'autre part, les méthodes indirectes, basées sur le Principe du Maximum, et qui numériquement se ramènent à une méthode de tir. Les algorithmes de calculs de temps conjugués sont reliés à un test de positivité d'une dérivée seconde intrinsèque, ou à un test de singularité du flot extrémal. On décrit un logiciel appelé COTCOT (Conditions of Order Two and COnjugate times), disponible sur le web, qui implémente les algorithmes précédents ainsi que la méthode de tir.

0n montre ensuite comment appliquer ces outils théoriques et numériques à deux problèmes issus de l'aéronautique :

– Le problème de contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique (contrat CNES), où le contrôle est l'angle de gîte, et le coût est le flux thermique total (facteur d'usure de la navette). L'objectif est de déterminer une trajectoire optimale jusqu'à une cible donnée, sachant que la navette est de plus soumise des contraintes sur l'état : flux thermique,

accélération normale, et pression dynamique. Ces contraintes rendent le problème de contrôle optimal difficile, et nécessitent une étude préliminaire théorique et géométrique sur les synthèses optimales locales avec contraintes. Cette étape facilite la mise en oeuvre et la convergence des algorithmes de calculs.

– Le problème de transfert orbital d'un satellite à poussée faible (contrats CNES, EADS), où le but est typiquement de transférer l'engin d'une orbite basse à une orbite géostationnaire en temps minimal, sachant que la force de propulsion est très faible. Le problème de temps optimal est important lorsque la poussée est faible (par exemple, une propulsion ionique), car le transfert orbital peut prendre plusieurs mois. De plus, des contraintes sur l'état comme par exemple les contraintes de cônes d'ombre (passage dans l'ombre de la Terre par rapport au soleil) compliquent l'application des méthodes précédemment décrites.

Pour ces deux problèmes, on présentera différentes méthodes théoriques et numériques basées sur des développements théoriques récents en contrôle optimal géométrique.

References

1. E. Trélat B. Bonnard, L. Faubourg. *Mécanique céleste et contrôle de systèmes spatiaux*. Collection "Mathématiques Concrètes. Math. & Appl. **51**, Springer Verlag, XIV, 276 pages. ISBN 3-540-28373-0, 2006.
2. E. Trélat. *Contrôle optimal : théorie* & *applications*. Collection "Mathématiques Concrètes. Vuibert , 246 pages. ISBN 2 7117 7175 X, 2005.