Sur la Théorie des Jeux Multicritères

Mohammed Said RADJEF

Laboratoire LAMOS
Département de Recherche Opérationnelle
Université de Béjaia

Ecole d'Eté ,Oran 2007

Introduction

La confluence des deux théories : théorie des jeux et optimisation multicritère a fait voir le jour à une nouvelle théorie qui est la théorie des jeux multicritères.

Les jeux multicritères modélisent des situations conflictuelles entre plusieurs personnes ayant plus d'un critère ou objectif. Les chercheurs s'intéressent de plus en plus à cette théorie, différents concepts de solutions ont été présentés et leurs conditions d'existence font l'objet d'intérêt de beaucoup de personnes.

Introduction

La confluence des deux théories : théorie des jeux et optimisation multicritère a fait voir le jour à une nouvelle théorie qui est la théorie des jeux multicritères.
Les jeux multicritères modélisent des situations conflictuelles entre plusieurs personnes ayant plus d'un critère ou objectif. Les chercheurs s'intéressent de plus en plus à cette théorie, différents concepts de solutions ont été présentés et leurs conditions d'existence font l'objet d'intérêt de beaucoup de personnes.

- D. Blackwell (1956)
  An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs. Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.
  et
  L.S.Shapley (1959).
  Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs. Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.
- Shapley $\longrightarrow$ Pareto-Nash pour un jeu multicritère non coopératif sous forme stratégique
- [1, 4, 3, 2, 3, 5]

- D. Blackwell (1956)
  An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs.
  Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.
  et
  L.S.Shapley (1959).
  Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs. Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.
- Shapley $\longrightarrow$ Pareto-Nash pour un jeu multicritère non coopératif sous forme stratégique
- [1, 4, 3, 2, 3, 5]

- D. Blackwell (1956)
  An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs.
  Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.
  et
  L.S.Shapley (1959).
  Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs. Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.
- Shapley $\longrightarrow$ Pareto-Nash pour un jeu multicritère non coopératif sous forme stratégique
- [1, 4, 3, 2, 3, 5]

- D. Blackwell (1956)
  An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs.
  Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.
  et
  L.S.Shapley (1959).
  Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs. Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.
- Shapley $\longrightarrow$ Pareto-Nash pour un jeu multicritère non coopératif sous forme stratégique
- [1, 4, 3, 2, 3, 5]

- D. Blackwell (1956)
  An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs. Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.
  et
  L.S.Shapley (1959).
  Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs. Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.
- Shapley $\longrightarrow$ Pareto-Nash pour un jeu multicritère non coopératif sous forme stratégique
- [1, 4, 3, 2, 3, 5]

Un jeu multicritère sous forme stratégique (normale) peut être représenté par un triplet

$$J_m = \langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$$

- $I = \{1, \ldots, N\}, N \geq 2$
- $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ l'ensemble des stratégies du joueur i
- $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ est l'ensemble des situations $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ du jeu une fois que chacun des joueurs ait choisi sa stratégie $x_i \in X_i$.
- $f_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}^{r_i}$ peut être considérée comme :

Un jeu multicritère sous forme stratégique (normale) peut être représenté par un triplet

$$J_m = \langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$$

- $I = \{1, \ldots, N\}, N \geq 2$
- $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ l'ensemble des stratégies du joueur i
- $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ est l'ensemble des situations $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ du jeu une fois que chacun des joueurs ait choisi sa stratégie $x_i \in X_i$.
- $f_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}^{r_i}$ peut être considérée comme :

Un jeu multicritère sous forme stratégique (normale) peut être représenté par un triplet

$$J_m = \langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$$

- $I = \{1, \ldots, N\}, N \geq 2$
- $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ l'ensemble des stratégies du joueur i
- $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ est l'ensemble des situations $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ du jeu une fois que chacun des joueurs ait choisi sa stratégie $x_i \in X_i$.
- $f_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}^{r_i}$ peut être considérée comme :

Un jeu multicritère sous forme stratégique (normale) peut être représenté par un triplet

$$J_m = \langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$$

- $I = \{1, \ldots, N\}, N \geq 2$
- $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ l'ensemble des stratégies du joueur i
- $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ est l'ensemble des situations $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ du jeu une fois que chacun des joueurs ait choisi sa stratégie $x_i \in X_i$.
- $f_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}^{r_i}$ peut être considérée comme :

Un jeu multicritère sous forme stratégique (normale) peut être représenté par un triplet

$$J_m = \langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$$

- $I = \{1, \ldots, N\}, N \geq 2$
- $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ l'ensemble des stratégies du joueur i
- $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ est l'ensemble des situations $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ du jeu une fois que chacun des joueurs ait choisi sa stratégie $x_i \in X_i$.
- $f_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}^{r_i}$ peut être considérée comme :

Un jeu multicritère sous forme stratégique (normale) peut être représenté par un triplet

$$J_m = \langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$$

- $I = \{1, \ldots, N\}, N \geq 2$
- $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ l'ensemble des stratégies du joueur i
- $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ est l'ensemble des situations $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ du jeu une fois que chacun des joueurs ait choisi sa stratégie $x_i \in X_i$.
- $f_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}^{r_i}$ peut être considérée comme :

- un ensemble de r_i critères f_{i_k} servant au joueur i d'évaluer toute situation du jeu ;
- ou comme une fonction multi-objectifs qui détermine en chaque situation du jeu, la valeur obtenue pour chacun des objectifs du joueur i représentés par les fonctions f_{i_k}

- un ensemble de r_i critères f_{i_k} servant au joueur i d'évaluer toute situation du jeu ;
- ou comme une fonction multi-objectifs qui détermine en chaque situation du jeu, la valeur obtenue pour chacun des objectifs du joueur i représentés par les fonctions f_{i_k}

- un ensemble de r_i critères f_{i_k} servant au joueur i d'évaluer toute situation du jeu ;
- ou comme une fonction multi-objectifs qui détermine en chaque situation du jeu, la valeur obtenue pour chacun des objectifs du joueur i représentés par les fonctions f_{i_k}

Jeu multicritère matriciel

Considérons le jeu multicritère entre trois joueurs I, II et III ayant chacun deux stratégies A et B.

$$I = \{I, II, III\}; \quad X_1 = X_2 = X_3 = \{A, B\}; f_1, f_2, f_3.$$

Jeu multicritère matriciel

Considérons le jeu multicritère entre trois joueurs I, II et III ayant chacun deux stratégies A et B.

$$I = \{I, II, III\}; \quad X_1 = X_2 = X_3 = \{A, B\}; f_1, f_2, f_3.$$

Jeu multicritère matriciel

Considérons le jeu multicritère entre trois joueurs I, II et III ayant chacun deux stratégies A et B.

$$I = \{I, II, III\}; \quad X_1 = X_2 = X_3 = \{A, B\}; f_1, f_2, f_3.$$

Le jeu peut être représenté sous la forme matricielle :

	IIIA			IIIB	
III	IIA	IIB	III	IIA	IIB
IA	(-2, -2, 2) (0, 0, 0)	(-2, 0, 2) (2, -4, 2)	IA	(-2, -2, 0) (2, 2, -4)	(5, 0, 0) (5, -2, -2)
IB	(0, -2, 2) (0, 2, 2)	(0, 0, 5) (0, -2, -3)	IB	(0, 5, 5) (2, 5, 2)	(0, 0, 0) (0, 0, 0)

TAB.: Matrice des gains

Stratégie de sécurité

Le concept de sécurité dans un jeu est une sorte d'assurance contre le pire. En effet, la stratégie de sécurité assure au joueur un gain minimum contre toute stratégie des autres joueurs. La définition de cette stratégie dans le cas d'un jeu multicritère, contrairement au jeu monocritère, est assez complexe. Haurie, dans [1], a proposé une définition basée sur l'optimalité de Pareto.

Pour chaque joueur, on définit une fonction dite auxiliaire $\nu_i : X_i \longrightarrow \mathbb{R}^{k(i)}$ comme suit :

$$\nu_i(x_i) = \left(\inf_{y_{-i} \in X_{-i}} f_{i_k}(x_i,\ y_i) \right) \qquad k \in \{1, \ldots, r(i)\} \qquad (1)$$

et l'on suppose que pour tout $i \in I,\ \nu_i$ est bien définie c'est-à-dire que l'inf est atteint.

Definition

$x_i^* \in X_i$ est une stratégie de sécurité pour le i^{eme} joueur si pour tout $x_i \in X_i$, $\quad \nu_i(x_i) \geqq \nu_i(x_i^*) \Longrightarrow \nu_i(x_i) = \nu_i(x_i^*)$.

Le processus de scalarisation est communément utilisé dans les problèmes d'optimisation vectoriel. Goffin et Haurie [2] ont obtenu des résultats d'existence des stratégies de sécurité Pareto optimales suivants :

Theorem

Soit $\alpha_k > 0,\ k \in \{1, \ldots, r(i)\}$ et $x_i^* \in X_i,\ i \in I$ tels que

$$\sum_{k=1}^{r(i)} \alpha_k \nu_{i_k}(x_i^*) \geqq \sum_{k=1}^{r(i)} \alpha_k \nu_{i_k}(x_i), \qquad \forall x_i \in X_i.$$

Alors, x_i^* est une stratégie de sécurité pour le i^{eme} joueur.

Le processus de scalarisation est communément utilisé dans les problèmes d'optimisation vectoriel. Goffin et Haurie [2] ont obtenu des résultats d'existence des stratégies de sécurité Pareto optimales suivants :

Theorem

Soit $\alpha_k > 0,\ k \in \{1, \dots, r(i)\}$ et $x_i^* \in X_i,\ i \in I$ tels que

$$\sum_{k=1}^{r(i)} \alpha_k \nu_{i_k}(x_i^*) \geqq \sum_{k=1}^{r(i)} \alpha_k \nu_{i_k}(x_i), \qquad \forall x_i \in X_i.$$

Alors, x_i^* est une stratégie de sécurité pour le i^{eme} joueur.

Theorem

Soit $\alpha > 0$, $k \in \{1, \ldots, r(i)\}$ et $x_i^* \in X_i^*$ tels que pour tout $x_i \in X_i$,

$$\sup_{y_{-i}^1,\ldots,y_{-i}^{r(i)} \in X_{-i}} \sum_{k=1}^{r(i)} \alpha_k f_{i_k}(x_i^*,\ y_{-i}^k) \geqq \sup_{y_{-i}^1,\ldots,y_{-i}^{r(i)} \in X_{-i}} \sum_{k=1}^{r(i)} \alpha_k f_{i_k}(x_i, y_{-i}^k).$$

Alors, x_i^* est une stratégie de sécurité pour le i^{eme} joueur.

Pour trouver la stratégie de sécurité Pareto-optimale du joueur I, on calcule

$$\nu_1(IA) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nu_1(IB) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors pour le joueur I, la stratégie de sécurité Pareto optimale est la stratégie *IB* et le niveau de sécurité efficace (de Pareto) est

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Equilibre Pareto Nash

En 1959, L. Shapley a généralisé le concept d'équilibre de Nash pour le cas des jeux multicritères sous forme normale.

Definition

Une situation $x^* \in X$ est

- un équilibre faiblement efficace de Nash (ou équilibre de Slater-Nash), si $\forall i \in I$ et $\forall y_i \in X_i$,

$$f_i(x^*) \not< f_i(x^*_{-i},\ y_i);$$

- un équilibre efficace de Nash (équilibre Pareto-Nash), si $\forall i \in I$ et $\forall y_i \in X_i$,

$$f_i(x^*) \not\leq f_i(x^*_{-i},\ y_i).$$

On notera par $X^{PN}(J_m)$ l'ensemble des équilibres Pareto-Nash et par $X^{SN}(J_m)$ l'ensemble des équilibres Slater-Nash pour le jeu multicritère J_m.

On a

$$X^{PN}(J_m) \subseteq X^{SN}(J_m).$$

On notera par $X^{PN}(J_m)$ l'ensemble des équilibres Pareto-Nash et par $X^{SN}(J_m)$ l'ensemble des équilibres Slater-Nash pour le jeu multicritère J_m.
On a

$$X^{PN}(J_m) \subseteq X^{SN}(J_m).$$

Les conditions d'existence d'un équilibre Pareto-Nash sont généralement établies en procédant par une scalarisation des fonctions vectorielles des gains des joueurs.(see for instance [2, 4]). Récemment, Ansari [1] a étudié les conditions d'existence d'un équilibre de Slater-Nash en utilisant un théorème sur l'existence d'un élément maximal pour une famille de correspondances.

Exemple

L'ensemble X^{SN} des équilibres Slater-Nash du jeu multicritère matriciel est :

$$X^{SN} = \Big\{(IA,\ IIA,\ IIIA),\ (IA,\ IIB,\ IIIA),\ (IB,\ IIA,\ IIIA)\} \bigcup$$

$$\bigcup \{(IB,\ IIB,\ IIIA),\ (IB,\ IIA,\ IIIB)\Big\}$$

et l'ensemble des équilibres Pareto-Nash est :

$$X^{PN} = \{(IA,\ IIB,\ IIIA),\ (IB,\ IIB,\ IIIA),\ (IB,\ IIA,\ IIIB)\}.$$

Equilibre Ideal de Nash

En 2000, M. Voorneveld and al [3] ont proposé un autre concept d'équilibre, appelé ici équilibre idéal de Nash, qui est stable contre toute déviation unilatérale des joueurs. Les auteurs ont proposé une axiomatisation du concept et ont construit une classe de jeux bi-critères qui admettent cet équilibre. Nous avons étendu l'étude à la classe générale des jeux multicritères sous forme normale.

Definition

Une situation $x \in X$ est un équilibre idéal de Nash dans le jeu multicritère, si pour tout joueur $i \in I$ et pour tout $y_i \in X_i$, on a

$$f_i(x) = f_i(x_i,\ x_{-i}) \geqq f_i(y_i,\ x_{-i}).$$

On note l'ensemble des équilibres idéaux de Nash du jeu par $X^{IN}(J_m)$.

Theorem

On a

$$X^{IN}(J_m) \subseteq X^{PN}(J_m) \subseteq X^{SN}(J_m).$$

On dit qu'une situation $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) \in X$ est en équilibre, ou définit une situation d'équilibre, si chacune x_i de ces stratégies est, pour le joueur i qui l'emploie, l'une des meilleures réponses possibles au système des $(N-1)$ stratégies employées par les autres joueurs.

Autrement dit, si les N joueurs ont choisi un système de N stratégies en équilibre et s'ils discutent ensuite la partie qu'ils ont jouée, chacun d'eux constate qu'il n'aurait pas pu mieux faire, compte tenu de ce qu'ont fait les autres.

On dit qu'une situation $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) \in X$ est en équilibre, ou définit une situation d'équilibre, si chacune x_i de ces stratégies est, pour le joueur i qui l'emploie, l'une des meilleures réponses possibles au système des $(N - 1)$ stratégies employées par les autres joueurs.
Autrement dit, si les N joueurs ont choisi un système de N stratégies en équilibre et s'ils discutent ensuite la partie qu'ils ont jouée, chacun d'eux constate qu'il n'aurait pas pu mieux faire, compte tenu de ce qu'ont fait les autres.

Si donc une nouvelle partie devait être jouée, aucun des joueurs ne serait incité par cette discussion à modifier sa manière de jouer. Il en résulte une certaine stabilité du résultat auquel ils sont alors parvenus.

C'est pourquoi A. Cournot, qui fut sans doute le premier à introduire cette notion d'équilibre, plus tard réintroduite par J. F. Nash, donnait aux résultats correspondants le nom de situations définitives.

Si donc une nouvelle partie devait être jouée, aucun des joueurs ne serait incité par cette discussion à modifier sa manière de jouer. Il en résulte une certaine stabilité du résultat auquel ils sont alors parvenus.
C'est pourquoi A. Cournot, qui fut sans doute le premier à introduire cette notion d'équilibre, plus tard réintroduite par J. F. Nash, donnait aux résultats correspondants le nom de situations définitives.

Considérons une coalition de joueurs $K \subseteq I$ et $y_K \in X_K = \prod_{i \in K} X_i$ une collection de stratégies des joueurs de la coalition K. On pose

$$\varphi_i(x,\ y_K) = f_i(x) - f_i(x_{I \setminus K},\ y_K), \quad i \in K$$

Definition

On dira qu'une stratégie $\bar{x} \in X$ est un *C-équilibre fort*, si : $\forall K \subset I$, il n'existe pas de $y_K \in X_K$ tel que :

$$\varphi_i(\bar{x},\ y_K) \in -intC_i(\bar{x}),\ \forall i \in K, \tag{2}$$

où pour tout $x \in X$ et $i \in I$, $C_i(x)$ est un cône convexe fermé de Y_i tel que $intC_i(x) \neq \emptyset$.

Si $C_i(x) = \mathbb{R}_+^{r(i)}$, alors on aura la définition suivante :

Definition

Une stratégie $\bar{x} \in X$ est un équilibre fort du jeu (J_M), si :
$\forall K \subset I$, il n'existe pas de $y_K \in X_K$ tel que

$$\varphi_i(\bar{x},\ y_K) \in -int(\mathbb{R}_+^{r(i)}) \quad \forall i \in K.$$

ou ce qui est équivalent

$$f_i(\bar{x}) < f_i(\bar{x}_{I \setminus K},\ y_K),\ \ \forall i \in K.$$

Position du problème

Soient deux pays : Pays 1 et Pays2 ayant le choix entre participer (coopérer c) aux négociations sur le problème de l'environnement ou ne pas y participer (faire défection d).
Dans un problème d'environnement, pour inciter les pays à participer aux négociations sur la réduction des émissions de gaz, des avantages peuvent leur être accordés en retour comme par exemple attribuer quelques avantages commerciaux en appliquant le commerce libre "open trade ". Nous reprendrons la modélisation faite par Hauer et Runge dans [1].

Jeu de négociation

Soient deux pays **pays1** et **pays2** ayant le choix entre participer (coopérer **c**) aux négociations sur le problème de l'environnement ou ne pas y participer (faire défection **d**).
La coopération d'un pays entraîne un commerce libre pour ce pays et sa non coopération entraîne un commerce restreint.

- Si les deux pays coopèrent alors chacun d'entre eux aura un certain gain.
- Un pays qui ne coopère pas aura un gain nul quelque soit la réaction de l'autre pays.
- Si un pays coopère et l'autre pas alors il aura un gain négatif.

Jeu de négociation

Soient deux pays **pays1** et **pays2** ayant le choix entre participer (coopérer **c**) aux négociations sur le problème de l'environnement ou ne pas y participer (faire défection **d**).
La coopération d'un pays entraîne un commerce libre pour ce pays et sa non coopération entraîne un commerce restreint.

- Si les deux pays coopèrent alors chacun d'entre eux aura un certain gain.
- Un pays qui ne coopère pas aura un gain nul quelque soit la réaction de l'autre pays.
- Si un pays coopère et l'autre pas alors il aura un gain négatif.

Jeu de négociation

Soient deux pays **pays1** et **pays2** ayant le choix entre participer (coopérer **c**) aux négociations sur le problème de l'environnement ou ne pas y participer (faire défection **d**).
La coopération d'un pays entraîne un commerce libre pour ce pays et sa non coopération entraîne un commerce restreint.

- Si les deux pays coopèrent alors chacun d'entre eux aura un certain gain.
- Un pays qui ne coopère pas aura un gain nul quelque soit la réaction de l'autre pays.
- Si un pays coopère et l'autre pas alors il aura un gain négatif.

Cette situation peut être modélisée sous forme d'un jeu de l'assurance noté :

$$< I, X, U^i_{jk} >$$

avec :

- $I = \{1, 2\}$: Ensemble des joueurs.
- $X = \{c, d\}$: Ensemble des stratégies de chacun des deux joueurs.
- U^i_{jk} : Gain du joueur $i \in I$ si le premier joueur joue la stratégie $j \in X$ et le deuxième joueur la stratégie $k \in X$.

	Pays 2		
		c	d
Pays1	c	(U^1_{cc}, U^2_{cc})	$(U^1_{cd}, 0)$
	d	$(0, U^2_{dc})$	$(0,0)$

Avec :

- pour le pays1 : $U^1_{cc} > \underbrace{U^1_{dc} = U^1_{dd}}_{=0} > U^1_{cd}$
- pour le pays2 : $U^2_{cc} > \underbrace{U^2_{cd} = U^2_{dd}}_{=0} > U^2_{dc}$

Jeu de négociation

Soient deux pays **pays1** et **pays2** ayant le choix entre participer (coopérer **c**) aux négociations sur le problème de l'environnement ou ne pas y participer (faire défection **d**).
La coopération d'un pays entraîne une réduction accrue des émissions de gaz et sa non coopération entraîne une réduction minimale des émissions gaz.

- Si les deux pays coopèrent alors chacun d'entre eux aura un certain gain.
- Si les deux pays ne coopèrent pas alors les deux auront un gain nul.
- Si lepremier pays coopère et que le deuxième non, alors le gain du premier est le meilleur gain qu'il peut avoir et le gain du deuxième est le pire gain qu'il peut avoir, et vis vers ça.

Cette situation peut être modélisée sous forme d'un jeu du dilemme du prisonnier :

$$< I, X, B^i_{kj} >$$

avec :

- $I = \{1, 2\}$: Ensemble des joueurs.
- $X = \{c, d\}$: Ensemble des stratégies de chacun des deux joueurs.
- B^i_{jk} : Gain du joueur $i \in I$ si le premier joueur joue la stratégie $j \in X$ et le deuxième joueur la stratégie $k \in X$.

La matrice des gains est la suivante :

	Pays 2		
		c	d
Pays1	c	(B^1_{cc}, B^2_{cc})	(B^1_{cd}, B^2_{cd})
	d	(B^1_{dc}, B^2_{dc})	(0,0)

Avec :

- pour le pays1 : $B^1_{dc} > B^1_{cc} > \underbrace{B^1_{dd}}_{=0} > B^1_{cd}$
- pour le pays2 : $B^2_{cd} > B^2_{cc} > \underbrace{B^2_{dd}}_{=0} > B^2_{dc}$

Formulation du jeu multicritère

Après avoir modélisé sous forme de jeux séparés les deux situations, on peut maintenant fusionner les deux jeux en un jeu multicritère à deux joueurs et à somme non nulle.
Le jeu sera noté :

$$J = < I, X, F_1(x,y), F_2(x,y) > \tag{3}$$

avec :

- $I = \{1, 2\}$: Ensemble des joueurs.
- $X = \{c, d\}$: Ensemble des stratégies de chacun des joueurs.
- $F_i(x,y) = (U^i_{xy}, B^i_{xy}), \quad i \in I$ le vecteur des fonctions gain du $i^{\text{ème}}$ joueur.

La matrice des gains est la suivante :

	Pays 2	
Pays1	**c**	**d**
c	$\left(\begin{pmatrix} U^1_{cc} \\ B^1_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^2_{cc} \\ B^2_{cc} \end{pmatrix}\right)$	$\left(\begin{pmatrix} U^1_{cd} \\ B^1_{cd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B^2_{cd} \end{pmatrix}\right)$
d	$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ B^1_{dc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^2_{dc} \\ B^2_{dc} \end{pmatrix}\right)$	$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Applications

L'intérêt croissant de la théorie des jeux, branche des mathématiques, est justifié par ses applications variées dans divers domaines :

- En économie, domaine d'excellence où l'utilité immédiate de la théorie des jeux fût soulignée (travaux de Von Neumann et Oscar Morgenstern) par :
  - *a)* [illegible] tenant compte de certains paramètres tels :
    1. le nombre de protagonistes (vendeurs-acheteurs),
    2. la fluctuation de l'offre et de la demande,
    3. les variations saisonnières et cycliques.
  - *b)* l'équité dans la division des biens et des patrimoines est un autre domaine pouvant être étudié par la théorie des jeux.

Applications

L'intérêt croissant de la théorie des jeux, branche des mathématiques, est justifié par ses applications variées dans divers domaines :

- En économie, domaine d'excellence où l'utilité immédiate de la théorie des jeux fût soulignée (travaux de Von Neumann et Oscar Morgenstern) par :

  a) la création de modèles de marchés pour divers produits en tenant compte de certains paramètres tels :

  1. le nombre de protagonistes (vendeurs-acheteurs);
  2. la fluctuation de l'offre et du la demande;
  3. les variations saisonnières et cycliques.

  b) l'équité dans la division des biens et des patrimoines est un autre domaine pouvant être étudié par la théorie des jeux.

Applications

L'intérêt croissant de la théorie des jeux, branche des mathématiques, est justifié par ses applications variées dans divers domaines :

- En économie, domaine d'excellence où l'utilité immédiate de la théorie des jeux fût soulignée (travaux de Von Neumann et Oscar Morgenstern) par :
  - *a*) la création de modèles de marchés pour divers produits en tenant compte de certains paramètres tels :
    1. le nombre de protagonistes (vendeurs-acheteurs) ;
    2. la fluctuation de l'offre et de la demande ;
    3. les variations saisonnières et cycliques.
  - *b*) l'équité dans la division des biens et des patrimoines est un autre domaine pouvant être étudié par la théorie des jeux.

Applications

L'intérêt croissant de la théorie des jeux, branche des mathématiques, est justifié par ses applications variées dans divers domaines :

- En économie, domaine d'excellence où l'utilité immédiate de la théorie des jeux fût soulignée (travaux de Von Neumann et Oscar Morgenstern) par :

  a) la création de modèles de marchés pour divers produits en tenant compte de certains paramètres tels :

  1. le nombre de protagonistes (vendeurs-acheteurs) ;
  2. la fluctuation de l'offre et de la demande ;
  3. les variations saisonnières et cycliques.

  b) l'équité dans la division des biens et des patrimoines est un autre domaine pouvant être étudié par la théorie des jeux.

Applications

L'intérêt croissant de la théorie des jeux, branche des mathématiques, est justifié par ses applications variées dans divers domaines :

- En économie, domaine d'excellence où l'utilité immédiate de la théorie des jeux fût soulignée (travaux de Von Neumann et Oscar Morgenstern) par :
  - *a*) la création de modèles de marchés pour divers produits en tenant compte de certains paramètres tels :
    1. le nombre de protagonistes (vendeurs-acheteurs) ;
    2. la fluctuation de l'offre et de la demande ;
    3. les variations saisonnières et cycliques.
  - *b*) l'équité dans la division des biens et des patrimoines est un autre domaine pouvant être étudié par la théorie des jeux.

Applications

L'intérêt croissant de la théorie des jeux, branche des mathématiques, est justifié par ses applications variées dans divers domaines :

- En économie, domaine d'excellence où l'utilité immédiate de la théorie des jeux fût soulignée (travaux de Von Neumann et Oscar Morgenstern) par :

  a) la création de modèles de marchés pour divers produits en tenant compte de certains paramètres tels :

  1. le nombre de protagonistes (vendeurs-acheteurs) ;
  2. la fluctuation de l'offre et de la demande ;
  3. les variations saisonnières et cycliques.

  b) l'équité dans la division des biens et des patrimoines est un autre domaine pouvant être étudié par la théorie des jeux.

Applications

L'intérêt croissant de la théorie des jeux, branche des mathématiques, est justifié par ses applications variées dans divers domaines :

- En économie, domaine d'excellence où l'utilité immédiate de la théorie des jeux fût soulignée (travaux de Von Neumann et Oscar Morgenstern) par :
  - *a*) la création de modèles de marchés pour divers produits en tenant compte de certains paramètres tels :
    1. le nombre de protagonistes (vendeurs-acheteurs) ;
    2. la fluctuation de l'offre et de la demande ;
    3. les variations saisonnières et cycliques.
  - *b*) l'équité dans la division des biens et des patrimoines est un autre domaine pouvant être étudié par la théorie des jeux.

Applications

L'intérêt croissant de la théorie des jeux, branche des mathématiques, est justifié par ses applications variées dans divers domaines :

- En économie, domaine d'excellence où l'utilité immédiate de la théorie des jeux fût soulignée (travaux de Von Neumann et Oscar Morgenstern) par :
  - *a*) la création de modèles de marchés pour divers produits en tenant compte de certains paramètres tels :
    1. le nombre de protagonistes (vendeurs-acheteurs) ;
    2. la fluctuation de l'offre et de la demande ;
    3. les variations saisonnières et cycliques.
  - *b*) l'équité dans la division des biens et des patrimoines est un autre domaine pouvant être étudié par la théorie des jeux.

Applications

L'intérêt croissant de la théorie des jeux, branche des mathématiques, est justifié par ses applications variées dans divers domaines :

- En économie, domaine d'excellence où l'utilité immédiate de la théorie des jeux fût soulignée (travaux de Von Neumann et Oscar Morgenstern) par :
  - *a*) la création de modèles de marchés pour divers produits en tenant compte de certains paramètres tels :
    1. le nombre de protagonistes (vendeurs-acheteurs) ;
    2. la fluctuation de l'offre et de la demande ;
    3. les variations saisonnières et cycliques.
  - *b*) l'équité dans la division des biens et des patrimoines est un autre domaine pouvant être étudié par la théorie des jeux.

- En sociologie, la théorie des jeux à N-personnes peut avoir pour objet d'étude :
    - *a)* la distribution des pouvoirs au cours des procédures législatives ;
    - *b)* les procédures de règles de la majorité et de prise de décision individuelle.
- Il est à noter, en outre, que les sociologues ont développé une branche entière de la théorie des jeux consacrée aux prises de décision dans les groupes.

- En sociologie, la théorie des jeux à N-personnes peut avoir pour objet d'étude :
  - *a*) la distribution des pouvoirs au cours des procédures législatives ;
  - *b*) les procédures de règles de la majorité et de prise de décision individuelle.

- Il est à noter, en outre, que les sociologues ont développé une branche entière de la théorie des jeux consacrée aux prises de décision dans les groupes.

- En sociologie, la théorie des jeux à N-personnes peut avoir pour objet d'étude :
  - *a*) la distribution des pouvoirs au cours des procédures législatives ;
  - *b*) les procédures de règles de la majorité et de prise de décision individuelle.
- Il est à noter, en outre, que les sociologues ont développé une branche entière de la théorie des jeux consacrée aux prises de décision dans les groupes.

- En sociologie, la théorie des jeux à N-personnes peut avoir pour objet d'étude :
  a) la distribution des pouvoirs au cours des procédures législatives ;
  b) les procédures de règles de la majorité et de prise de décision individuelle.
- Il est à noter, en outre, que les sociologues ont développé une branche entière de la théorie des jeux consacrée aux prises de décision dans les groupes.

- En sociologie, la théorie des jeux à N-personnes peut avoir pour objet d'étude :
  - *a*) la distribution des pouvoirs au cours des procédures législatives ;
  - *b*) les procédures de règles de la majorité et de prise de décision individuelle.
- Il est à noter, en outre, que les sociologues ont développé une branche entière de la théorie des jeux consacrée aux prises de décision dans les groupes.

- En épidémiologie, la théorie des jeux trouve application dans :
    a) les procédures d'immunisation ;
    b) les méthodes d'expérimentation de vaccins et de médicaments.

- Dans l'art de la guerre, le règlement du jeu est soit la victoire, soit la défaite. De ce fait, cette catégorie de jeux est à somme non nulle puisque la perte du vaincu en victimes et blessés n'est pas un gain pour le vainqueur.
  Dans le domaine politico-militaire, certaines applications de la théorie des jeux ont été critiquées du fait de la déshumanisation et la simplification extrême de phénomènes complexes.
- Enfin, des domaines récents tel l'informatique (système multi-agents) s'intègrent de plus en plus dans le champ des applications de la théorie des jeux.

- Dans l'art de la guerre, le règlement du jeu est soit la victoire, soit la défaite. De ce fait, cette catégorie de jeux est à somme non nulle puisque la perte du vaincu en victimes et blessés n'est pas un gain pour le vainqueur.
  Dans le domaine politico-militaire, certaines applications de la théorie des jeux ont été critiquées du fait de la déshumanisation et la simplification extrême de phénomènes complexes.
- Enfin, des domaines récents tel l'informatique (système multi-agents) s'intègrent de plus en plus dans le champ des applications de la théorie des jeux.

- Dans l'art de la guerre, le règlement du jeu est soit la victoire, soit la défaite. De ce fait, cette catégorie de jeux est à somme non nulle puisque la perte du vaincu en victimes et blessés n'est pas un gain pour le vainqueur.
  Dans le domaine politico-militaire, certaines applications de la théorie des jeux ont été critiquées du fait de la déshumanisation et la simplification extrême de phénomènes complexes.
- Enfin, des domaines récents tel l'informatique (système multi-agents) s'intègrent de plus en plus dans le champ des applications de la théorie des jeux.

D. Blackwell.
An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs.
Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.

L.S. Shapley.
Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs.
Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.

K. Bergstresser and P.L. Yu.
Domination structure and multicriteria problems in N-person games.
Theory Decision, 8 : 5–48, 1972.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in two-person multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 63 : 167–189, 1989.

N. Shashishekhap and D. Ghose and L. Anand and U.R. Prasad.
A survey of solution concepts in multicriteria games.
J. Indian Inst. Sci., 75 (2) : 141–174, 1995.

D. Blackwell.
An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs.
Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.

L.S. Shapley.
Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs.
Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.

K. Bergstresser and P.L. Yu.
Domination structure and multicriteria problems in N-person games.
Theory Decision, 8 : 5–48, 1972.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in two-person multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 63 : 167–189, 1989.

N. Shashishekhap and D. Ghose and L. Anand and U.R. Prasad.
A survey of solution concepts in multicriteria games.
J. Indian Inst. Sci., 75 (2) : 141–174, 1995.

D. Blackwell.
An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs.
Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.

L.S. Shapley.
Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs.
Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.

K. Bergstresser and P.L. Yu.
Domination structure and multicriteria problems in N-person games.
Theory Decision, 8 : 5–48, 1972.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in two-person multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 63 : 167–189, 1989.

N. Shashishekhap and D. Ghose and L. Anand and U.R. Prasad.
A survey of solution concepts in multicriteria games.
J. Indian Inst. Sci., 75 (2) : 141–174, 1995.

D. Blackwell.
An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs.
Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.

L.S. Shapley.
Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs.
Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.

K. Bergstresser and P.L. Yu.
Domination structure and multicriteria problems in N-person games.
Theory Decision, 8 : 5–48, 1972.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in two-person multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 63 : 167–189, 1989.

N. Shashishekhap and D. Ghose and L. Anand and U.R. Prasad.
A survey of solution concepts in multicriteria games.
J. Indian Inst. Sci., 75 (2) : 141–174, 1995.

D. Blackwell.
An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs.
Pacific Journal of Mathematics, 6 : 1–8, 1956.

L.S. Shapley.
Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs.
Naval Research Logistics Quarterly, 6 : 57–61, 1959.

K. Bergstresser and P.L. Yu.
Domination structure and multicriteria problems in N-person games.
Theory Decision, 8 : 5–48, 1972.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in two-person multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 63 : 167–189, 1989.

N. Shashishekhap and D. Ghose and L. Anand and U.R. Prasad.
A survey of solution concepts in multicriteria games.
J. Indian Inst. Sci., 75 (2) : 141–174, 1995.

D. Ghose.
Multicriteria games with applications to two-target game problem.
Phdthesis, Dept of Electrical Engng, Indian Institute of Science,Bangalore, Indian, 1989.

F.R. Fernandez and J. Puerto.
Vector linear programming in zero-sum multicriteria matrix games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 89 (2) : 115–127, 1996.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in continuous-kernel multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 69 : 543–553, 1991.

D. Ghose.
Multicriteria games with applications to two-target game problem.
Phdthesis, Dept of Electrical Engng, Indian Institute of Science,Bangalore, Indian, 1989.

F.R. Fernandez and J. Puerto.
Vector linear programming in zero-sum multicriteria matrix games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 89 (2) : 115–127, 1996.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in continuous-kernel multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 69 : 543–553, 1991.

D. Ghose.
Multicriteria games with applications to two-target game problem.
Phdthesis, Dept of Electrical Engng, Indian Institute of Science,Bangalore, Indian, 1989.

F.R. Fernandez and J. Puerto.
Vector linear programming in zero-sum multicriteria matrix games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 89 (2) : 115–127, 1996.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in continuous-kernel multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 69 : 543–553, 1991.

D. Ghose.
Multicriteria games with applications to two-target game problem.
Phdthesis, Dept of Electrical Engng, Indian Institute of Science,Bangalore, Indian, 1989.

F.R. Fernandez and J. Puerto.
Vector linear programming in zero-sum multicriteria matrix games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 89 (2) : 115–127, 1996.

D. Ghose and U.R. Prasad.
Solution concepts in continuous-kernel multicriteria games.
Journal of Optimization Theory and Applications, 69 : 543–553, 1991.

A. Haurie.
On Pareto optimal decisions for a coalition of a subset of players
IEEE Trans, AC(18) :144–148, 1973.

J. Goffin and A. Haurie.
Necessary conditions and sufficient conditions for Pareto optimality in multicriteria perturbed system
Proc. 5th IFIP Conf. on Optimiz., 184–193, 1973.

M. Voorneveld and S. Grahn and M. Dufwenberg
Ideal Equilibria in Noncooperative Multicriteria Games
Mathematical Methods of Operations Research, 52 : 65-77, 2000.

J. Yu and and GXZ. Yuan
The Study of Equilibria for Multiobjective Games by Fixed Point and Ky Fan Minimax Inequality Methods
Computers Math. Applic., 35 : 17-24, 1998

A. Haurie.
On Pareto optimal decisions for a coalition of a subset of players
IEEE Trans, AC(18) :144–148, 1973.

J. Goffin and A. Haurie.
Necessary conditions and sufficient conditions for Pareto optimality in multicriteria perturbed system
Proc. 5th IFIP Conf. on Optimiz., 184–193, 1973.

M. Voorneveld and S. Grahn and M. Dufwenberg
Ideal Equilibria in Noncooperative Multicriteria Games
Mathematical Methods of Operations Research, 52 : 65-77, 2000.

J. Yu and and GXZ. Yuan
The Study of Equilibria for Multiobjective Games by Fixed Point and Ky Fan Minimax Inequality Methods
Computers Math. Applic., 35 : 17-24, 1998.

A. Haurie.
On Pareto optimal decisions for a coalition of a subset of players
IEEE Trans, AC(18) :144–148, 1973.

J. Goffin and A. Haurie.
Necessary conditions and sufficient conditions for Pareto optimality in multicriteria perturbed system
Proc. 5th IFIP Conf. on Optimiz., 184–193, 1973.

M. Voorneveld and S. Grahn and M. Dufwenberg
Ideal Equilibria in Noncooperative Multicriteria Games
Mathematical Methods of Operations Research, 52 : 65-77, 2000.

J. Yu and and GXZ. Yuan
The Study of Equilibria for Multiobjective Games by Fixed Point and Ky Fan Minimax Inequality Methods
Computers Math. Applic., 35 : 17-24, 1998.

A. Haurie.
On Pareto optimal decisions for a coalition of a subset of players
IEEE Trans, AC(18) :144–148, 1973.

J. Goffin and A. Haurie.
Necessary conditions and sufficient conditions for Pareto optimality in multicriteria perturbed system
Proc. 5th IFIP Conf. on Optimiz., 184–193, 1973.

M. Voorneveld and S. Grahn and M. Dufwenberg
Ideal Equilibria in Noncooperative Multicriteria Games
Mathematical Methods of Operations Research, 52 : 65-77, 2000.

J. Yu and and GXZ. Yuan
The Study of Equilibria for Multiobjective Games by Fixed Point and Ky Fan Minimax Inequality Methods
Computers Math. Applic., 35 : 17-24, 1998.

A. Haurie.
On Pareto optimal decisions for a coalition of a subset of players
IEEE Trans, AC(18) :144–148, 1973.

J. Goffin and A. Haurie.
Necessary conditions and sufficient conditions for Pareto optimality in multicriteria perturbed system
Proc. 5th IFIP Conf. on Optimiz., 184–193, 1973.

M. Voorneveld and S. Grahn and M. Dufwenberg
Ideal Equilibria in Noncooperative Multicriteria Games
Mathematical Methods of Operations Research, 52 : 65-77, 2000.

J. Yu and and GXZ. Yuan
The Study of Equilibria for Multiobjective Games by Fixed Point and Ky Fan Minimax Inequality Methods
Computers Math. Applic., 35 : 17-24, 1998.

QH. Ansari and S. Schaible and JC. Yao
The System of Generalized Vector Equilibrium Problems with Applications
Journal of Global Optimization, 22 :3-16, 2002

QH. Ansari and S. Schaible and JC. Yao
The System of Generalized Vector Equilibrium Problems with Applications
Journal of Global Optimization, 22 :3-16, 2002

G. Hauer and F. Runge.
Trade-Environment Linkages in the Resolution of Transboundary Externalities.
The Word Economy, 22, 25-39, 1999.

G. Hauer and F. Runge.
Trade-Environment Linkages in the Resolution of Transboundary Externalities.
The Word Economy, 22, 25-39, 1999.

Merci pour votre attention